1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ファジィパラメータを含む角型構造の多目的 0-1 計画問題に対する遺伝的アルゴリズムによる対話型ファジィ満足化手法

広島大学 *加藤浩介 KATO Kosuke
01202665 広島大学 坂和正敏 SAKAWA Masatoshi
広島大学 池亀敏則 IKEGAME Toshinori

1. はじめに

本研究では，問題の定式化に携わった専門家の人間としての判断をより適切に表現するために，パラメータのあいまい性がファジィ数として特性づけられているファジィパラメータを含む角型構造の多目的 0-1 計画問題に焦点をあて，対応する非ファジィな α-多目的 0-1 計画問題の各目的関数に対する意思決定者のファジィ目標をも考慮した対話型ファジィ満足化手法を提案する．このとき，解くべき問題は 0-1 計画問題であり，大規模な問題に対しては，近似解法に頼らざるを得ない．本研究では，近年組合せ最適化問題の近似解法として注目されてきている遺伝的アルゴリズム [1] を用いる．特に，上のミニマックス問題は角型構造を保持しているので，この特殊構造を利用するための分解手続きを含む遺伝的アルゴリズムを提案し，計算の効率化をはかる．

2. ファジィパラメータを含む多目的 0-1 計画問題に対する対話型ファジィ満足化手法

次のようなファジィパラメータを含む角型構造の多目的 0-1 計画問題を考える．

$$
\left.\begin{array}{lrl}
\text{minimize} & z_1(\boldsymbol{x}) = & \tilde{\boldsymbol{c}}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \tilde{\boldsymbol{c}}_{1p}\boldsymbol{x}_p \\
\vdots & & \vdots \\
\text{minimize} & z_l(\boldsymbol{x}) = & \tilde{\boldsymbol{c}}_{l1}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \tilde{\boldsymbol{c}}_{lp}\boldsymbol{x}_p \\
\text{subject to} & & \tilde{A}_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \tilde{A}_p\boldsymbol{x}_p \leqq \tilde{\boldsymbol{b}}_0 \\
 & & \tilde{B}_1\boldsymbol{x}_1 \qquad\qquad\quad \leqq \tilde{\boldsymbol{b}}_1 \\
 & & \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
 & & \qquad\qquad \tilde{B}_p\boldsymbol{x}_p \leqq \tilde{\boldsymbol{b}}_p \\
 & & \boldsymbol{x}_j \in \{0,1\}^{n_j} \quad (j = 1,\ldots,p)
\end{array}\right\} \quad (1)
$$

ここで，ベクトル $\tilde{\boldsymbol{y}}$ や行列 $\tilde{Z}$ は，その要素が Dubois と Prade によるファジィ数であることを示す．

いま，意思決定者が問題 (1) におけるすべてのファジィ数のメンバシップ関数値がある値 α（許容レベル）以上であるべきと判断したとする．このとき，この α に対して，意思決定者がもっとも望ましいように $(A, B, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ の値を

定義 1 (α-レベル集合) ファジィパラメータ $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}}$ および $\tilde{\boldsymbol{c}}$ の α-レベル集合 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}})_\alpha$ はすべてのファジィパラメータのメンバシップ関数値が α 以上となるなるような A, B, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の値の集合として定義される．

のように定義される α-レベル集合 $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}})_\alpha$ の中から選ぶという，次のような非ファジィな α-多目的 0-1 計画問題を導入する．

$$
\left.\begin{array}{lrl}
\text{minimize} & z_1(\boldsymbol{x}) = & \boldsymbol{c}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{c}_{1p}\boldsymbol{x}_p \\
\vdots & & \vdots \\
\text{minimize} & z_l(\boldsymbol{x}) = & \boldsymbol{c}_{l1}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{c}_{lp}\boldsymbol{x}_p \\
\text{subject to} & & A_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + A_p\boldsymbol{x}_p \leqq \boldsymbol{b}_0 \\
 & & B_1\boldsymbol{x}_1 \qquad\qquad\quad \leqq \boldsymbol{b}_1 \\
 & & \qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
 & & \qquad\qquad B_p\boldsymbol{x}_p \leqq \boldsymbol{b}_p \\
 & & \boldsymbol{x}_j \in \{0,1\}^{n_j} \quad (j = 1,\ldots,p) \\
 & & (A, B, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}})_\alpha
\end{array}\right\} \quad (2)
$$

ここで，$X(A, B, \boldsymbol{b})$ は上の α-多目的 0-1 計画問題の実行可能領域を表す．また，パラメータ $(A, B, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ はもはや定数ではなく決定変数として扱われていることに注意しよう．

さて，意思決定者の判断のあいまい性を考慮すれば，問題 (2) に対して，“目的関数 $z_i(\boldsymbol{x})$ をだいたいある値以下にしたい” というようなファジィ目標を持っていると考える方が自然であると思われる．このとき，これらのファジィ目標がメンバシップ関数 $\mu_i(z_i(\boldsymbol{x}))$ $(i = 1,\ldots,l)$ で規定されるとし，次のような一般化された α-多目的 0-1 計画問題を考えよう．

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{maximize} & (\mu_1(z_1(\boldsymbol{x})),\ldots,\mu_l(z_l(\boldsymbol{x}))) \\
\text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(A, B, \boldsymbol{b}) \\
 & (A, B, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}})_\alpha
\end{array}\right\} \quad (3)
$$

通常の多目的 0-1 計画問題に対するパレート最適性の概念の自然な拡張として，問題 (3) に対する M-α-パレート最適解の概念を導入する．

定義 2 (M-α-パレート最適解) $\boldsymbol{x}^* \in X(A^*, B^*, \boldsymbol{b}^*)$ に対して $\mu_i(z_i(\boldsymbol{x})) \geq \mu_i(z_i(\boldsymbol{x}^*))$ $(i = 1,\ldots,l)$ かつ少なくとも 1 つの j $(1 \leqq j \leqq l)$ に対して $\mu_j(z_j(\boldsymbol{x})) > \mu_j(z_j(\boldsymbol{x}^*))$ となるような他の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in X(A, B, \boldsymbol{b})$ およびパラメータ $(A, B, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}})_\alpha$ が存在しないときかつそのときに限り，$\boldsymbol{x}^*$ は一般化された α-多目的 0-1 計画問題に対する M-α-パレート最適解と呼ばれ，対応するパラメータ値 $(A^*, B^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*)$ は α-レベル最適係数と呼ばれる．

定義 2 からすぐわかるように，問題 (3) に対する M-α-パレート最適解 は一般に無限個存在するため，意思決定者は主観に基づいて M-α-パレート最適解集合の中

から妥協解あるいは満足解を選択しなければならない．

本研究で提案する対話型ファジィ満足化手法においては，M-α-パレート最適解である満足解の候補を求めるために，意思決定者が許容レベル α とファジィ目標に関するメンバシップ関数の達成の基準レベル（基準メンバシップ値）を設定すれば，対応する M-α-パレート最適解は，次のメンバシップ関数値空間におけるミニマックス問題を解くことにより得られる [2]．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & \max\limits_{i=1,\ldots,l} \{\bar{\mu}_i - \mu_i(\boldsymbol{c}_i \boldsymbol{x})\} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(A, B, \boldsymbol{b}) \\ & (A, B, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{c}})_\alpha \end{array}\right\} \quad (4)$$

ファジィ数の行列およびベクトル $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{\boldsymbol{b}}$, $\tilde{\boldsymbol{c}}$ の α-レベル集合の性質を考慮すれば，パラメータ A, B, $\boldsymbol{b}$ および $\boldsymbol{c}$ の実行可能領域は，それぞれ，閉区間 $[A^L_\alpha, A^R_\alpha]$, $[B^L_\alpha, B^R_\alpha]$, $[\boldsymbol{b}^L_\alpha, \boldsymbol{b}^R_\alpha]$ および $[\boldsymbol{c}^L_\alpha, \boldsymbol{c}^R_\alpha]$ となる．その結果，問題 (4) の最適解は以下の問題を解くことにより求められる．

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{minimize} & \max\limits_{i=1,\ldots,l} \{\bar{\mu}_i - \mu_i(\boldsymbol{c}^L_{i\alpha} \boldsymbol{x})\} & \\ \text{subject to} & A^L_{1\alpha}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + A^L_{p\alpha}\boldsymbol{x}_p \leqq & \boldsymbol{b}^R_{0\alpha} \\ & B^L_{1\alpha}\boldsymbol{x}_1 \qquad\qquad \leqq & \boldsymbol{b}^R_{1\alpha} \\ & \ddots \qquad\qquad \vdots & \\ & B^L_{p\alpha}\boldsymbol{x}_p \leqq & \boldsymbol{b}^R_{p\alpha} \\ & \boldsymbol{x}_j \in \{0,1\}^{n_j} \quad (j = 1, \ldots, p) & \end{array}\right\} \quad (5)$$

対話型ファジィ満足化手法においては，意思決定者が問題 (5) を解くことにより得られる M-α-パレート最適解に対するメンバシップ関数値および目的関数値に満足するまで，意思決定者による基準値と α の更新が繰り返される．

3. 分解手続きを含む遺伝的アルゴリズム

問題 (5) は 0-1 計画問題であるので，厳密な最適解を求めることは一般に非常に困難である．そこで，組合せ最適化問題に対する近似解法として広く用いられてきている遺伝的アルゴリズムの問題 (5) への適用を試みる．幸いにも，問題 (5) は角型構造を保持しているので，その特殊構造を活かした解法が望ましい．このような観点から，分解手続きを含む遺伝的アルゴリズムを導入する．

問題 (5) の特殊構造を活用するという観点から，個体 S を p 個のブロック制約 $B_j\boldsymbol{x}_j \leqq \boldsymbol{b}_j$ に対応する部分個体 s^j $(j = 1, \ldots, p)$ の集まりとして捉え，図 1 のような 3 重構造文字列により部分個体を表現する．図

$$\mathrm{s}^j = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \multicolumn{4}{|c|}{r^j} \\ \hline \nu^j(1) & \nu^j(2) & \cdots & \nu^j(n_j) \\ \hline g^j_{\nu^j(1)} & g^j_{\nu^j(2)} & \cdots & g^j_{\nu^j(n_j)} \\ \hline \end{array}$$

図 1: 3 重構造文字列

中において，3 重構造文字列は，上段のブロックの優先順位を表す r^j，中段の表現型における変数の添字を表す $\nu^j(k)$ $(\in \{1, \ldots, n_j\})$，下段の 0 または 1 の値をとる $g^j_{\nu^j(k)}$ から構成される．

このような意思決定者の満足解を求めるためのアルゴリズムは以下のようにまとめられる．

手順 0 与えられた制約のもとで，$\alpha = 0$ と $\alpha = 1$ に対する各目的関数の最小値と最大値を求める．

手順 1 意思決定者が，許容レベル α と基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ の初期値を設定する．

手順 2 初期個体群として N 個の 3 重構造文字列型の部分個体をもつ個体を乱数により発生させる（ただし，2 回目以降の対話においては，前回の基準値に対する最適個体を必ず含むようにする）．

手順 3 各個体（部分個体）の適合度を遺伝子型からデコードされた表現型に基づいて計算し，現個体群の平均適合度 f_{mean} と最大適合度 $f_{\max}$ を求める．その後，もし $t > I_{\min}$ と $(f_{\max} - f_{\text{mean}})/f_{\max} < \varepsilon$ が同時に成り立つか，あるいは $t > I_{\max}$ が成り立っているならば，(このとき，最大適合度をもつ個体が最適個体とみなされる)．上のどちらの条件も成り立っていなければ，$t = t + 1$ として手順 4 に進む．

手順 4† 部分個体単位で再生を行う．

手順 5† 交叉率 p_c にしたがって，部分個体単位で交叉（3 重構造文字列の中下段に対する PMX）を行う．

手順 6† 突然変異率 p_m にしたがって，部分個体単位で突然変異を行う．

手順 7† 逆位率 p_i にしたがって，部分個体単位で逆位（3 重構造文字列の中段に対する逆位）を行う．

手順 8 交叉率 p_c にしたがって，個体単位で交叉（3 重構造文字列の上段に対する PMX）を行う．

手順 9 逆位率 p_i にしたがって，個体単位で逆位（3 重構造文字列の上段に対する逆位）を行う．その後，手順 3 に戻る．

手順 10 もし，意思決定者が遺伝的アルゴリズムにより得られた M-α-パレート最適解に対するメンバシップ関数値および目的関数値に満足するならば，終了．さもなければ，意思決定者が現在の α と目的関数値を考慮しながら α の値と基準メンバシップ値を更新して手順 2 に戻る．

上記のアルゴリズムにおいて，† のついた手順は，部分個体単位で独立に実行することができ，効率的な計算が可能になると考えられる．

参考文献

[1] Z. Michalewicz: *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer-Verlag (1992), Second, extended edition (1994).

[2] M. Sakawa: *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press (1993).