1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

タブー探索による直交ラテン方陣の構成

京都大学 *土村 展之 TSUCHIMURA Nobuyuki
京都大学 茨木 俊秀 IBARAKI Toshihide

1 はじめに

n 次の直交ラテン方陣を構成する問題は, 古来難しい組合せ問題の一つとして知られている. オイラーは $n \equiv 2 \pmod 4$ に対して n 次の直交ラテン方陣は存在しないと予想したが, その後 10 次について存在が証明され [3], その結果 $n = 1, 2, 6$ を除いてすべての n に対し存在することが判明した. しかし, これは直交ラテン方陣を構成する一つの方法が得られたというだけで, すべてが求められているわけではなく, ランダムに与えられた初期解から, それを修正することによって直交ラテン方陣を得ることは, 極めて困難な問題と考えられる.

一方, 困難な組合せ問題に対し, メタヒューリスティックスと呼ばれる枠組みに従った種々の近似アルゴリズムが注目を集め, 多くの成功例が報告されている. その中でもタブー探索は, 複雑な条件であってもそれらを満たす解を見出す能力が高いと言われている.

そこで本研究では, 直交ラテン方陣の構成問題に対してタブー探索にもとづくアルゴリズムを作り, その探索能力を評価するとともに, 効果的なタブー探索を実施するための方針を得ることを目指す.

なお, 直交ラテン方陣は決定問題なので, 満たされていない条件の数を目的関数として持たせ, 最適化問題に帰着させることでタブー探索を適用した. 目的関数値が 0 になれば組合せ問題が解けたことになる.

2 定義・準備

2.1 直交ラテン方陣

n 次のラテン方陣は, n 行 n 列の 2 次元のセルの中に, $N = \{1, 2, ..., n\}$ の数字をならべて, どの行・どの列を見ても, 同じ数字が 2 つ以上存在しないものをいう. 各数字は n 回ずつ登場する. 直交ラテン方陣は, ラテン方陣を 2 枚作って, 2 枚の同じセルにある数字 2 つを順序対と見るとき, これら n^2 個がすべて異なるものをいう. 図 1は, 5 次の直交ラテン方陣の例である.

2.2 直交ラテン方陣の表現

2 枚のラテン方陣の同じ 2 つの行 (列) を入れ換える操作を施しても, 直交ラテン方陣の条件には影響がなく, 別表現の直交ラテン方陣が作れる. さらに, 直交ラテン方陣のすべてのラベル $1, 2, ..., n$ に任意の置換を施して書き改めても, やはり直交ラテン方陣が得られる. この時, 2 枚のラテン方陣に異なる置換を施してもよい. 従って, 2 枚のラテン方陣の, ある 1 行 (あるいは 1 列) のラベルを $1, 2, ..., n$ に正規化することができる.

2.3 タブー探索

タブー探索は, 局所探索の一種で, 暫定解を保持しながら, それを近傍の中で最も良い解へ更新するという操作を反復する. この際, タブーリストを用いて解の禁止領域を作り, サイクリングを起こすことを防ぐことで, 局所最適解から抜け出そうとするのが特徴である. タブーリストは, 一般に解そのものではなく, 前の解との関係をあらわす変化で記憶するのが良いとされている. さらに, 長期メモリに探索過程の記録を残し, これを利用することで探索方向を分散させることも提案されている.

3 タブー探索の適用方法

3.1 目的関数

直交ラテン方陣には, 行の制約・列の制約・順序対の制約の 3 種類の制約条件がある. まず, 2 枚のラテン方陣の各行および各列に対し, 現れていない N のラベルの数を調べ, その行 (あるいは列) のコストとする. また, $N \times N$ の順序対のうち, 現れていないものの数を調べ, 順序対に対するコストとする. そして, すべての制約についてコストの合計をとり, 目的関数とした.

なお, 目的関数については, 順序対制約は w 倍 (w は正の実数) して合計するなどの方法も考えられる.

3.2 解の表現と近傍

探索に用いる解の表現は, 各セルの要素として N のラベルを持つ 2 つの $n \times n$ 行列とする. 任意の行列対

4	5	1	2	3
5	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2

4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1
1	2	3	4	5
5	1	2	3	4

図 1: 5 次の直交ラテン方陣の例

を探索空間として, 直交ラテン方陣の3種類の制約を同時に目的関数に組み込むのは, 自由度が大きすぎるため, 有効な探索が困難であると考えられる. そこで本研究では, 特定の制約をすべて満たすような行列対のみに探索を限定する方法を2通り考える.

その1つは, 行の制約をすべて満たすもののみを探索する方法である. この場合, 各行は N の順列となる. 近傍は, ある1行の2つのラベルの交換により得られる解集合とする.

もう1つは, 順序対の制約をすべて満たすもののみを探索する方法である. この場合, 解は $N \times N$ の順序対に対する置換とみなすことができる. 近傍は, 任意の2つの順序対の位置の交換により得られる解集合とする.

3.3 タブーリストの持ちかた・長さ

タブーリストは, 前の解との変化を記憶するのが良いとされている. 交換した2つのセル (あるいはラベル) を, 対で覚える, それぞれを覚える, などの方法を試みた.

タブーリストの長さはパラメータとし, 計算実験によって挙動を調べる.

3.4 近傍の縮小

探索時間を短くするため, 近傍サイズを小さくすることを考える.

まず, 制約違反に直接かかわるラベルを含むような交換操作のみに探索を限定する方法を試みた. 行の制約をすべて満たす解のみを探索する場合は, 各列について重複するラベルを持つセルと, 重複する順序対を持つセルを調べ上げ, これらのセルを含む交換のみを探索する. 順序対の制約をすべて満たす解のみを探索する場合は, 各行と列について重複するラベルを持つセルを調べ上げ, そのようなセルどうしの交換のみを探索する.

また, 正規化を利用して, 1行のラベルを $1, 2, \ldots, n$ に固定する方法も試みた.

3.5 長期メモリ

各セル (あるいはラベル) に対し, 交換操作に参加した回数を記憶し, 長期メモリとする. 直交ラテン方陣ではセル・ラベル共に相対的であることを考慮し, セルやラベルを直接記憶するのではなく, 1行のラベルを $1, 2, \ldots, n$ に固定して, 絶対的なラベルに対して記憶を行う工夫も試みた.

3.6 近傍解の選択

近傍に最も良い目的関数値をとる解がたくさんある場合, どれを選択するかが問題になる. その中からランダムに1つ選ぶ, 長期メモリを評価に用いて, 交換操作に参加する2つのセル (あるいはラベル) の長期メモリの値の和が小さいものを優先的に選ぶ, などの方法を試みた.

3.7 多様化

ある程度探索を行った後, まったく違う領域の解に強制的にジャンプするという操作 (多様化) も導入し, その頻度と基準を考える. この操作は, 具体的には長期メモリなどを利用して, 適当なラベル (あるいは順序対) の交換を行うことにより実現する. また, ランダム多スタートとの比較も行う.

4 実験結果

詳しい結果については, 紙面の都合上当日に発表させていただくが, 59.1MIPS のワークステーション Sun SPARC classic を用いて, $n = 7$ では20分で10個程度, $n = 8$ では1.5時間で1個の直交ラテン方陣を見出すことに成功している. また, タブー探索については, 以下の傾向が観測されている.

- 探索空間を限定するために満たすべき制約として, 行の制約と順序対の制約の, いずれを用いた場合でも, 探索能力はほぼ同等である.
- タブーリストは, セルで記憶してもラベルで記憶しても大差はないが, 交換したセル (あるいはラベル) を対で記憶する方が, それぞれを単独で記憶するよりもよい. また, タブーリストの長さは短くても (例えば $n = 7$ で 3〜7) 十分な性能を発揮する.
- 長期メモリの実施法は種々試みたが, 有用なものは見つけられなかった.
- 近傍の縮小方法として, 制約違反に直接かかわるラベルを含むような交換操作のみに探索を限定する方法は大きな効果があり, 探索能力は少し落ちるが, 大幅に計算時間を短縮できた. 一方, 1行のラベルを $1, 2, \ldots, n$ に固定する方法は, 探索領域が制限されすぎるためか, 逆効果であった.

5 今後の展望

タブー探索に通常組み込まれている要素は大体試みたので, 今後は, 前回の解の更新とかかわりの深い近傍を優先的に調べるなどの工夫を試みる予定である.

参考文献

[1] F. Glover: "Tabu search - Part I," *ORSA Journal on Computing* **1** (1989) 190-206; Part II, ditto, **2** (1990) 4-32.

[2] 久保幹雄: 「メタヒューリスティックス」, 離散構造とアルゴリズムIV, 近代科学社 (1995) 171-222.

[3] C. L. Liu: *Introduction to combinatorial mathematics*, McGrew-Hill Book Company (1968). (伊理 正夫, 伊理 由美 共訳: 組合せ数学入門II, 共立全書 (1972).)

[4] 茨木俊秀: 「組合せ最適化の手法」, 電学論C, **114** (1994) 411-419.