1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

目的関数の係数が決定変数によって変化するファジィ多目的計画問題の近似解法

*東京理科大学　鈴木義治　SUZUKI Yoshiharu
01704260　ソニー（株）　横山哲男　YOKOYAMA Tetsuo
02401460　東京理科大学　生田目崇　NAMATAME Takashi
01701440　東京理科大学　山口俊和　YAMAGUCHI Toshikazu

1　はじめに

生産計画問題で，計画を立てる時点では材料の使用限度や工程の稼働限界などに不確定な要因が存在する場合がある．そのようなあいまいさを考慮して解を求める手法に，ファジィ多目的計画法がある．

ファジィ多目的計画問題において，例えば売上高を目的関数とするとき，係数である製品の価格は決定変数である販売量に影響を受けて変化する場合がある．このように価格の変動を考慮した生産計画問題では，目的関数の係数は定数値ではなく決定変数の線形関数として表されることがある．その場合，関数を明確に与えることは困難であるので区間数を係数とする線形関数として表す．このように考えると問題は2次の目的関数をもつ区間型ファジィ多目的計画問題となり，直接解くことが困難である．そこで本研究では区間数である目的関数の係数を0-1変数を用いて区分的に近似し，区間2次計画問題を混合0-1線形計画問題に帰着させる解法を提案する．

2　係数が決定変数の線形関数で表される多目的計画問題の定式化

目的関数の係数 C_{kj} と決定変数 x_j の間に次式のような関係がある場合を考える．

$$C_{kj}(x_j) = u_{kj}x_j + [v_{kj}^L, v_{kj}^U] \quad (1)$$
$$(k = 1, \cdots, K; j = 1, \cdots, n)$$

ただし $[v_{kj}^L, v_{kj}^U]$ は上限値が v_{kj}^U，下限値が v_{kj}^L の区間数，u_{kj} は定数である．このように目的関数の係数を決定変数の関数として表すと，通常のファジィ多目的計画問題は〖P1〗のように定式化される．

〖P1〗
最大化

$$z_k = \sum_{j=1}^{n} C_{kj}(x_j)x_j = \sum_{j=1}^{n} (u_{kj}x_j^2 + [v_{kj}^L, v_{kj}^U]x_j) \quad (2)$$
$$(k = 1, \cdots, K)$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \lesssim \tilde{b}_i \quad (i = 1, \cdots, m) \quad (3)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \quad (4)$$

ここで，(3) 式は左辺がだいたい b_i 以下という制約である．

3　提案する解法

〖P1〗は目的関数の係数に区間数と決定変数を含んでいるため，2次の区間型多目的計画問題になり，解くことが困難である．そこで本研究では0-1変数を用いて係数の関数を区分的に近似し，目的関数の係数が決定変数を含まない形にする．

決定変数の関数で表された係数を N 等分し，C_{kj} を C'_{kj} で表す．

$$C'_{kj} = \begin{cases} \left[c_{kj1}^L, c_{kj1}^U\right], & e_{j1} \leq x_j \leq e_{j2} \\ \left[c_{kj2}^L, c_{kj2}^U\right], & e_{j2} \leq x_j \leq e_{j3} \\ \vdots & \vdots \\ \left[c_{kjN}^L, c_{kjN}^U\right], & e_{jN} \leq x_j \leq e_{jN+1} \end{cases} \quad (5)$$
$$(k = 1, \cdots, K; j = 1, \cdots, n)$$

すると〖P1〗は目的関数が1次式で表される．決定変数 x_j も N 等分し，$x_{j1}, \cdots, x_{jN}$ に分割する．x_j を (6) 式のように $x_{j1}, \cdots, x_{jN}$ の和で表す．0-1変数 s_{jh} を用い，$x_{j1}, \cdots, x_{jN}$ の範囲を (7) 式のように表す．(8),(9) 式より s_{jh} は0か1の値をとり，さらに N 個ある s_{jh} のうちただ1つが1の値をとり，他はすべて0なので，同様に N 個ある x_{jh} のうち0以外の値をとるのは

ただ１つである．

$$x_j = \sum_{h=1}^{N} x_{jh} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{6}$$

$$e_{jh}s_{jh} \le x_{jh} \le e_{jh+1}s_{jh} \tag{7}$$
$$(j=1,\cdots,n; h=1,\cdots,N)$$

$$\sum_{h=1}^{N} s_{jh} = 1 \quad (j=1,\cdots,n) \tag{8}$$

$$s_{jh} \in \{0,1\} \tag{9}$$
$$(j=1,\cdots,n; h=1,\cdots,N)$$

これにより，【P1】は【P2】のような目的関数が１次の区間型多目的計画問題になる．

【P2】

最大化

$$z_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{N}\left[c_{kjh}^{L}, c_{kjh}^{U}\right] x_{jh} \quad (k=1,\cdots,K) \tag{10}$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \lesssim \tilde{b}_i \quad (i=1,\cdots,m) \tag{11}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=1,\cdots,n) \tag{12}$$

$$x_j = \sum_{h=1}^{N} x_{jh} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{13}$$

$$e_{jh}s_{jh} \le x_{jh} \le e_{jh+1}s_{jh} \tag{14}$$
$$(j=1,\cdots,n; h=1,\cdots,N)$$

$$\sum_{h=1}^{N} s_{jh} = 1 \quad (j=1,\cdots,n) \tag{15}$$

$$s_{jh} \in \{0,1\} \tag{16}$$
$$(j=1,\cdots,n; h=1,\cdots,N)$$

【P2】は目的関数の係数に区間数を含んでいるので，このままでは解くことが困難である．区間数の大小関係を区間数の下限値 c^L と中央値 c^M で判断すると考え [2]，$2\times k$個の目的関数を持つ問題に変換し，その問題に Werners[1] の解法を適用する．制約条件と目的関数のメンバシップ関数を線形関数で与え，最小オペレータ法で統合すると，【P3】を解けばよいことになる．

【P3】

最大化

$$\lambda \tag{17}$$

制約条件

$$\mu_{b_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \ge \lambda \quad (i=1,\cdots,m) \tag{18}$$

$$\mu_{g_k^L}(z_k^L) \ge \lambda \quad (k=1,\cdots,K) \tag{19}$$

$$\mu_{g_k^M}(z_k^M) \ge \lambda \quad (k=1,\cdots,K) \tag{20}$$

$$x_j = \sum_{h=1}^{N} x_{jh} \quad (j=1,\cdots,n) \tag{21}$$

$$e_{jh}s_{jh} \le x_{jh} \le e_{jh+1}s_{jh} \tag{22}$$
$$(j=1,\cdots,n; h=1,\cdots,N)$$

$$\sum_{h=1}^{N} s_{jh} = 1 \quad (j=1,\cdots,n) \tag{23}$$

$$s_{jh} \in \{0,1\} \tag{24}$$
$$(j=1,\cdots,n; h=1,\cdots,N)$$

ただし，

$$z_k^L = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{N} c_{kjh}^{L} x_{jh} \quad (k=1,\cdots,K) \tag{25}$$

$$z_k^M = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{N} c_{kjh}^{M} x_{jh} \quad (k=1,\cdots,K) \tag{26}$$

また，$\mu_{g_k^L}$，$\mu_{g_k^M}$ はそれぞれ係数が区間数の下限値，中央値である目的関数の線形メンバシップ関数である．【P3】は目的関数と制約条件式が１次式で表される通常の線形計画問題なので，シンプレックス法により解を求めることができる．

4　おわりに

目的関数の係数に決定変数と区間数を含むような多目的計画問題は区間型非線形計画問題となるため解くことが困難である．本研究では，目的関数の係数を区分的に分割し，目的関数の係数から決定変数を取り除いて通常の線形計画問題に帰着させる区間型２次計画問題の近似解法を提案した．

【参考／引用文献】

[1] B.Werners: "Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints", Eur.J.Oper.Res.,pp342-349,Vol.31(1987)

[2] 石渕久生，田中英夫: "区間係数をもつ線形計画問題の定式化とその解析", 日本経営工学会誌, pp.320-329,vol.40,No.5(1989)