Max-Min ナップサック問題の近似解法*

02501760 防衛大学校情報工学科 °二川真由美 FUTAKAWA Mayumi
01700900 同 上 山田武夫 YAMADA Takeo
01107660 同 上 片岡靖詞 KATAOKA Seiji

1 問題の定式化

n 個の商品の集合 $N := \{1,2,\ldots,n\}$ があり，各商品の重量 w_j と利得 p_j が与えられているとする $(j \in N)$. 商品は s 個の群に分かれていて，k 番目の商品群を $N^k \subseteq N$ と記し，$\cup_{k=1}^{s} N^k = N, N^k \cap N^h = \emptyset\ (k \neq h)$, $|N^k| = n_k$ とする．Max-Min ナップサック問題(MMKP) とは，ナップサックに収容可能な商品の集合で，各商品群ごとの総利得の最小値を最大化する問題であり，次のように定式化できる．

$$MMKP: \left| \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \min\limits_{1\le k\le s} \sum\limits_{j\in N^k} p_j x_j \\ \text{subject to} & \sum\limits_{j\in N} w_j x_j \le C, \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j \in N \end{array} \right.$$

$s \geq 2$ の MMKP は $\mathcal{NP}$ 困難であることが証明できる．また，動的計画法を用いた擬多項式時間のアルゴリズムを作成することもできるが，メモリの制約から実際には小規模の問題しか解くことができない．

2 上界値の計算

2.1 MMKP の連続緩和とその分割

$(s = 2$ の$)$MMKP の連続緩和は，

$$C(MMKP): \left| \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \min\left\{ \sum\limits_{j\in N^1} p_j x_j, \sum\limits_{j\in N^2} p_j x_j \right\} \\ \text{subject to} & \sum\limits_{j\in N} w_j x_j \le C, \\ & 0 \le x_j \le 1, \quad j \in N \end{array} \right.$$

と書ける．これを以下のように分割して解くことを考える．まず，容量 C を商品群 1，2 の容量 W^1, W^2 とし，それぞれについて互いに独立した補助問題

$$Aux(k): \left| \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \sum\limits_{j\in N^k} p_j x_j \\ \text{subject to} & \sum\limits_{j\in N^k} w_j x_j \le W^k, \\ & 0 \le x_j \le 1, \quad j \in N^k \end{array} \right.$$

を考える $(k = 1,2)$. $Aux(k)$ は（連続型）ナップサック問題で容易に解くことができ，この解を $(\bar{x}^k(W^k), \bar{z}^k(W^k))$ と記す．このとき，問題 $C(MMKP)$ は次のように書き換えられる．

$$C^{\dagger}(MMKP): \left| \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \min\{\bar{z}^1(W^1), \bar{z}^2(W^2)\} \\ \text{subject to} & W^1 + W^2 \le C, \\ & W^1, W^2 \ge 0 \end{array} \right.$$

2.2 上界値の計算法

$C^{\dagger}(MMKP)$ において，商品は商品群ごとに効率順に番号づけられていて，$p_1^k/w_1^k \geq p_2^k/w_2^k \geq \cdots \geq p_{n_k}^k/w_{n_k}^k$ であるとする．j までの商品の累積重量と累積利得を商品群ごとに W_j^k, P_j^k で定義し，(W_j^1, P_j^1) を点 L_j，$(C - W_j^2, P_j^2)$ を点 R_j とする．これらを図示すると $L_0L_1 \cdots L_{n_1}$ は右上がりの折れ線，$R_0R_1 \cdots R_{n_2}$ は左上がりの折れ線となる．それぞれを折れ線 L, R と略記する．今，折れ線 L の節点によって W-P 平面を $n_1 + 2$ 個の帯状領域 I_j $(j = 0,\cdots,n_1+1)$ に分割する (図 1)．最適解においては，$W^2 = C - W^1$ が成立するので，$C^{\dagger}(MMKP)$ の目的関数は図 1 の太線で表示した部分となり，これら 2 本の折れ線 L, R の交点 $(\bar{W}^1, \bar{z})$ が $C^{\dagger}(MMKP)$ の解を与え，$\bar{z}$ が MMKP の上界値となる．

折れ線 L, R の交点を求めるには，この交点が存在する線分 $L_{u-1}L_u$, $R_{v-1}R_v$ を求めれば十分である．以下では，このような u, v を 2 分探索法を重複して利用することにより効率的に算出する方法を示す．

最初に，関数 INTERVAL() を導入する．これは，点 R_j を入力とし，これが属する領域の番号を返す関数で，2 分探索法を用いて容易に実現される．すると，線分 $R_{v-1}R_v$

*OR 学会秋季大会，(埼玉 1995.10. 16-17)

は次のように2分探索法を用いて求められる. まず, $l=n_2$, $r=0$ とおくと, 点 R_l は折れ線 L の上側に, 点 R_r は下側に位置することを確認する. 次に, $m=\lfloor(l+r)/2\rfloor$ に対し, $k=\mathrm{INTERVAL}(R_m)$ を計算する. この時, $R_m=(C-W_m^2, P_m^2)$ が線分 $L_{k-1}L_k$ の上側にあれば, $l=m$ とし, そうでなければ $r=m$ として以上を $l-r=1$ となるまで反復すると, 最後の l が v を与える.

以上より, 折れ線 R は線分 $R_{v-1}R_v$ において折れ線 L と交わることがわかったが, 次に折れ線 L が R と交わる線分 $L_{u-1}L_u$ を次のように求める. 初期区間として, $l:=\mathrm{INTERVAL}(R_v)-1$, $r:=\mathrm{INTERVAL}(R_{v-1})$ をとると, 交点はこの間の区間に含まれることは明白である. $m=\lfloor(l+r)/2\rfloor$ とし, 点 $L_m=(W_m^1, P_m^1)$ が線分 $R_{v-1}R_v$ の上にあれば $r=m$, そうでなければ $l=m$ と置く. 以上を $r-l=1$ となるまで反復すると, 最後に得られた r が求める u である.

上のアルゴリズムの計算量は $O(\log n_1 \cdot \log n_2)$ となる.

3 近似解法

3.1 自明解

緩和問題 $C(MMKP)$ を解いて u, v を得た. そこで, $\underline{x}^k=(\underline{x}_j^k | j\in N^k)$ を, $k=1$ では $j\le u-1$ のときに1, $k=2$ では, $j\le v-1$ のとき1, それ以外は0で定義し, $\underline{x}=(\underline{x}^1,\underline{x}^2)$, $\underline{z}=\min\{P_{u-1}^1, P_{v-1}^2\}$ とすると, $\underline{x}$ は明らかにMMKPの1つの実行可能解であり, そのときの目的関数値は $\underline{z}$ である. これをMMKPの自明解と呼ぶ.

3.2 グリーディ解

自明解から出発し, 「累積利得の少ない方の商品群から, 残っている商品のうちナップサックに収容でき, かつ最も効率のよいものを次に採用する」という方針で逐次商品をナップサックに入れていく方法をアルゴリズムGREEDYと呼ぶ. GREEDYの計算量は明らかに $O(n_1+n_2)$ である. GREEDYによって得られる解を $(\tilde{x}, \tilde{z})$ と表記し, MMKPのグリーディ解と呼ぶ.

3.3 誤差評価

MMKPの最適値を z^* で表わすと, グリーディ解の相対誤差 ξ は $(z^*-\tilde{z})/z^*\times 100$ (%)で与えられる. しかし, 今 z^* は未知であるので, $\xi_1 := (\bar{z}-\tilde{z})/\bar{z}\times 100$ により誤差を評価する.

4 問題の縮小

適当な上界値と下界値を利用すると, 問題中の一部の変数を0または1に固定し, 問題の規模を縮小(釘付けテスト)できる. これをMMKPに導入することを考える. 図1において交点を含む2つの線分 $L_{u-1}L_u$, $R_{v-1}R_v$ の傾きをそれぞれ γ_u, $-\gamma_v$ として, $\mu_j^1 := |\, p_j-\gamma_u w_j \,|$, $\mu_j^2 := |\, p_j-\gamma_v w_j \,|$ を定義すると, 次が成立する.

定理 1 MMKPの任意の実行可能解を z' とし,

$$J^1 := \left\{ j \mid j\in N^1,\ \bar{z}-\frac{\gamma_v}{\gamma_u+\gamma_v}\mu_j^1 \le z' \right\},$$
$$J^2 := \left\{ j \mid j\in N^2,\ \bar{z}-\frac{\gamma_u}{\gamma_u+\gamma_v}\mu_j^2 \le z' \right\},$$

とする. このとき, 最適解 $\mathring{x}=(\mathring{x}^1, \mathring{x}^2)$ において,

(i) $j\in J^1$ かつ $j<u$ ならば, $\mathring{x}_j^1=1$,
(ii) $j\in J^1$ かつ $j>u$ ならば, $\mathring{x}_j^1=0$,
(iii) $j\in J^2$ かつ $j<v$ ならば, $\mathring{x}_j^2=1$,
(iv) $j\in J^2$ かつ $j>v$ ならば, $\mathring{x}_j^2=0$,

が成り立つ. z' としては, 前節のグリーディ解を利用する.

5 数値実験

当日示す.

参考文献

[1] S.Martello, P.Toth *Knapsack Problems*, John Wiley & Sons.

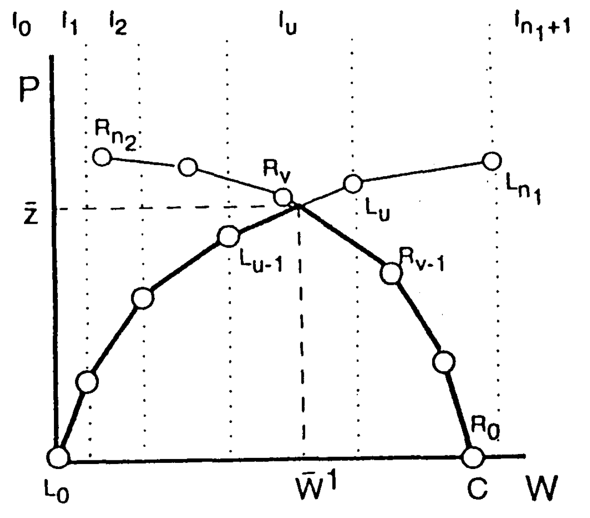

図1 折れ線と領域分割