1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

最小通過流問題の諸性質と最適路の明示法

01107680 防衛大学校 *片岡 靖詞 KATAOKA Seiji
01700900 防衛大学校 山田 武夫 YAMADA Takeo

1 はじめに

1.1 問題の定義と従来のモデル

有向ネットワーク $G = (N, A, \ell, w)$ を考える．ここで N は点集合，A は枝集合，ℓ, w は $|A|$ 次元非負ベクトルで，それぞれ枝の長さと幅を示す．移動距離と通過時間とは比例していると考え，目的関数は，出発点 $s \in N$ から到達点 $t \in N$ へ大きさ V の物体を一定速度で完全に通過させる時間の最小化とする．この問題を最小通過流問題 (Minimum Passage Flow Problem : MPFP) と呼ぶことにする．

MPFP はビル避難計画問題 [1,2] として研究されているが，従来の研究では，時間経過の概念を導入するために，グラフを各単位時間毎に準備した拡張グラフを用い，最小費用流問題に帰着させている (図 1)．

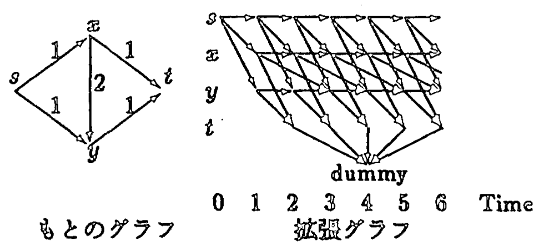

図 1: 従来の避難計画問題のモデル

拡張グラフを用いた解には，次のような欠点を持つ．

1. 拡張グラフが大きくなり過ぎてしまう．
2. 解が，単位時間のサイズに依存し，離散的になる．
3. 拡張グラフの真横の枝は，流れの停滞を示している．
4. 各枝の通過時間が，流す大きさに依らず一定である．
5. 最小費用流問題の解は，各枝の流量を与えるだけであり，避難経路は示されない．

1.2 移動距離の定義

大きさを持ち，形を自由に変えられる物体を一定速度で，完全にシステム外にまで通過させるためには，物体がシステム内を通過しているときの形態も考慮しなければならない．例えばシステムが長さ ℓ と幅 w の管状であるとき，大きさ V の物体が通過するために必要な移動距離は，管の長さ ℓ に，管の幅に広がった物体の長さ V/w を加えた値 $(\ell + V/w)$ になる．つまり，通過時間は，流れの幅と大きさにも依存する．したがって，MPFP において決定すべき要因は，どの s-t 路を，幅いくらで，どれだけの大きさ (または長さ) で移動させるかである．

2 問題の定式化

2.1 最適通過流の諸性質

問題の定式化をするに先立って，MPFP の最適解の諸性質について説明する．ネットワーク G において，すべての s-t 路全体の集合を P とし，ある s-t 路 $p_i\ (\in P)$ を通過する流れを f_i，幅を q_i，長さを d_i，大きさを $v_i(= q_i d_i)$ と表記する．

命題 1 最適解においては，どの流れ f_i も，到達点 t において同時にシステムを通過完了する (図 2)．

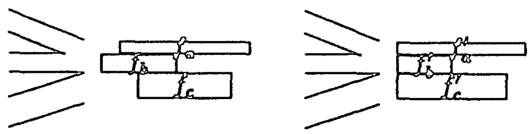

図 2: 最適な複数の流れは同時に通過完了する

命題 2 最適解において，複数の流れが同一枝を時間的に相前後して通過するとき，それらの流れの間は接しており，空白時間は存在しない (図 3)．

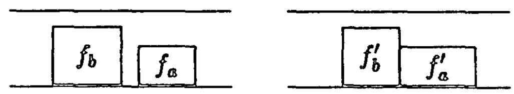

図 3: 相前後する流れの間にはすき間がない

命題 3 複数の前後相接する連続した最適な流れは，相重なる流れに分割して流すことができる (図 4)．

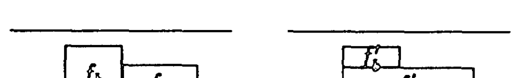

図 4: 前後の流れは，重なる流れに分割できる

2.2 定式化

枝 $j (\in A)$ の幅を w_j，長さを ℓ_j とする．路 $p_i \in P$ が，枝 j を通るとき $m_{ij} = 1$，それ以外のとき $m_{ij} = 0$

となる $|P|\times|A|$ 行列を M と定義する．このとき，MPFP は次のように定式化できる．

$$\begin{aligned} \min \quad & L & (2.1)\\ \text{s.t.} \quad & M\boldsymbol{\ell}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{L} & (2.2)\\ & M^t\boldsymbol{q}\le\boldsymbol{w} & (2.3)\\ & \boldsymbol{d}^t\boldsymbol{q}=V & (2.4)\\ & d_iq_i\ge 0 & (2.5)\\ & \boldsymbol{q}\ge\mathbf{o},\boldsymbol{d}:\text{符号制約なし} & (2.6)\end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{L}$ はすべての要素が L であるような $|P|$ 次元列ベクトルである．この定式化から，変数 $\boldsymbol{d}$ を消去でき，次のように新たに定式化を構成することができる．

$$\begin{aligned} \min \quad & L=\frac{V+(M\boldsymbol{\ell})^t\boldsymbol{q}}{\sum q_i} & (2.7)\\ \text{s.t.} \quad & M^t\boldsymbol{q}\le\boldsymbol{w} & (2.8)\\ & \boldsymbol{q}\ge\mathbf{o} & (2.9)\end{aligned}$$

以上のように，MPFP は分数計画問題に定式化されるが，MPFP は最小費用流問題と密接に関わりがある．

2.3 最小費用流問題との等価性

V を横軸，L を縦軸にとると，両者の関係は，$\boldsymbol{q}$ が $\bar{\boldsymbol{q}}$ に固定されていると，傾きが $1/\sum\bar{q}_i(\ge 0)$ の直線になる．したがって，最適解における V と最適値 L^* との関係は，様々な $\boldsymbol{q}$ における直線群の最小値をとった部分，つまり区分線形な単調非減少凹関数になる．これは，$\sum q_i$ が与えられたときの $(M\boldsymbol{\ell})^t\boldsymbol{q}$ 最小化と見なすこともできる．

ここで $(M\boldsymbol{\ell})^t\boldsymbol{q}=\boldsymbol{\ell}^t(M^t\boldsymbol{q})$ であることに注意すると，右辺は最小費用流問題の目的関数に一致している．制約は (2.8) 式だけであり，これはネットワーク流問題の枝の容量制約にすぎない．

以上より，MPFP は最小費用流問題と本質的に等価であり，V と L^* の区分線形凹関数が折れ曲がるときの $\sum q_i$ の増加量は，最小費用流問題を主双対法で解く際の流量増加路における増加量に一致することが示される．

3 順方向 s-t 路の明示方法

3.1 残余ネットワークの逆向き s-t 路の問題

最小費用流問題を解くことによって，与えられた V に対する最適な流れ幅の総和 $\sum q_i$ の値と，各枝の流量を求めることはできる．しかしながら，最適解を与える路 p_i は一般に決定できないため，MPFP で決定されるべき各流れの幅 q_i, 大きさ v_i $(p_i\in P)$ の値を決定することもできない．このことは，避難計画問題の場合，最小費用流問題を解いても，個々の避難者がどのような避難経路を通ればよいか明示されていないことを示している．

最小費用流問題を解く際に主双対法を用いた場合，残余 (residual) ネットワークを逐次準備して，そのネットワークにおいて流量増加 s-t 路を見つけていく．これらの流量増加 s-t 路の中に，もとのネットワークにおける逆向きの枝が存在していた場合には，順方向枝だけで構成された s-t 路群を一意に決めることができない．だが，ある可能流れ幅 $\bar{\boldsymbol{q}}$ に対し，各枝を通る流量を $\bar{\boldsymbol{w}}=M^t\bar{\boldsymbol{q}}$ とおくと，(2.7) 式より，

$$L=\frac{V+(M\boldsymbol{\ell})^t\bar{\boldsymbol{q}}}{\sum\bar{q}_i}=\frac{V+\boldsymbol{\ell}^t(M^t\bar{\boldsymbol{q}})}{\sum\bar{q}_i}=\frac{V+\boldsymbol{\ell}^t\bar{\boldsymbol{w}}}{\sum\bar{q}_i} \quad (3.1)$$

なので，順方向 s-t 路の違いによっても目的関数値には影響しないことがわかる．したがって，順方向 s-t 路のみによる実行可能な流れを 1 つ発見すればよいことがわかる．

3.2 順方向 s-t 路による実行可能流の発見

順方向の s-t 流を見失う主な理由には，残余ネットワークにおける，逆向き枝を含む s-t 流の存在があげられる．これは，以前に発見した路へ流していた流量が多過ぎたことへの対処である．そこで，逆向き枝を含まない，順方向の s-t 流だけで，定められた枝の流量を満足するようなネットワークの構築を考えることにする．

飽和 (saturate) ネットワーク $G^s=(N^s,A^s,\boldsymbol{\ell}^s,\boldsymbol{w}^s)$ とは，G のある実行可能な流れ $\boldsymbol{x}^s$ から，流れが存在している枝 $A^s(=\{(i,j)|0<x^s_{ij}\le w_{ij},(i,j)\in A\})$ のみで構成され，$N^s=\{i,j|(i,j)\in A^s\}$ とする．また枝の長さと幅に関しては，$\ell^s_{ij}=\ell_{ij}$ $((i,j)\in A^s)$, $w^s_{ij}=x^s_{ij}$ $((i,j)\in A^s)$ とする．G^s では，N^s の任意の分割 $S,\bar{S}$ $(S\cup\bar{S}=N^s,\ S\cap\bar{S}=\emptyset,\ s\in S,\ t\in\bar{S})$ に対し，

$$\sum_{i\in S,j\in\bar{S}}w^s_{ij}-\sum_{i\in S,j\in\bar{S}}w^s_{ji}=G^s\text{の最小カット値} \quad (3.2)$$

が成立する．このとき，次の命題が成立する．

命題 4 飽和ネットワーク G^s において最大流をラベリング法を用いて求めるとき，G の順方向 s-t 路のみで解に収束する（G の逆向き枝を含む s-t 路は不要である）．

G^s においては，s-t 順方向路が見つけられなくなるのは，すべての枝が飽和しているときだけで，それ以外では必ず s-t 順方向路が存在する．以上より，各路を明示するためには，$\boldsymbol{x}^s$ を MPFP の最適解に設定すればよい．

4 計算機実験

学会当日にて報告（予定）

参考文献

[1] Ahuja et al. *Network Flows* (1993).
[2] Jarvis et al. *Naval Res. Logis.* 34, 1987, 487-503.