1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

一般グラフの Dulmage–Mendelsohn 型分解†

01012384 京都大学 岩田 覚 IWATA Satoru

1 はじめに

数値計算やシステム解析での実用性が広く認められていると同時に, 理論的にも重要な2部グラフの Dulmage–Mendelsohn 分解 [6] の一般グラフへの拡張について論じる. この分解は, Edmonds–Gallai 分解の細分になっており, 一般グラフの最大マッチングと, 双方向グラフ (bidirected graph) の強連結成分分解 [2] を用いて, 効率的に求められる.

2 Dulmage–Mendelsohn 型分解

無向グラフ $G=(V,E)$ におけるマッチングの端点集合の全体を $\mathcal{W}$ と書く. このとき, $(V,\mathcal{W})$ はデルタマトロイドになっている [3, 4, 5]. 互いに素な V の部分集合の順序対の全体を 3^V と書く. デルタマトロイド $(V,\mathcal{W})$ の階数関数 $\varrho: 3^V \to \mathbb{Z}$ は,

$$\varrho(X,Y) = \max_{W \in \mathcal{W}} \{|X \cap W| - |Y \cap W|\}$$

によって定義されている. 階数関数 ϱ は, 任意の $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2) \in 3^V$ に対して,

$$\begin{aligned}\varrho(X_1,Y_1) + \varrho(X_2,Y_2) \\ \geq \varrho((X_1,Y_1) \sqcap (X_2,Y_2)) \\ +\varrho((X_1,Y_1) \sqcup (X_2,Y_2))\end{aligned}$$

を満たす. この性質は, ϱ の双劣モジュラ性 (bisubmodularity) と呼ばれている. ただし,

$$\begin{aligned}&(X_1,Y_1) \sqcap (X_2,Y_2) = (X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2),\\ &(X_1,Y_1) \sqcup (X_2,Y_2)\\ &\quad = ((X_1 \cup X_2) - (Y_1 \cup Y_2),\\ &\qquad (Y_1 \cup Y_2) - (X_1 \cup X_2)).\end{aligned}$$

グラフ G の欠損度を $\mathrm{def}(G)$ と書くと,

$$|X| - |Y| - \varrho(X,Y) \leq \mathrm{def}(G) \qquad (1)$$

が成立する. ここで, (1) 式を等号で満たすような $(X,Y) \in 3^V$ の族を $\mathcal{F}_*$ とし, さらに, $\mathcal{F}_*$ の中で $|X|-|Y|$ を最小化するものの族を $\mathcal{F}$ とする. このとき, $\mathcal{F}_*$ も $\mathcal{F}$ もともに, $\sqcup$ と $\sqcap$ に関して閉じている.

次の補題1は, 階数関数の単調性と双劣モジュラ性から導かれる. さらに, グラフの構造を考慮して, 補題2を得る.

補題 1. $(X,Y) \in \mathcal{F}$, $Z = V-(X \cup Y)$ とすると, 任意の $u \in X$ と $v \in Z$ に対して,

$$\varrho(X-\{u\}, Y \cup \{v\}) = \varrho(X,Y)$$

が成立する.

補題 2. $(X,Y) \in \mathcal{F}$, $Z = V-(X \cup Y)$ とすると, X と Y とを結ぶ枝は存在しない.

最大マッチングに使われる枝の分布に関して, 以下の補題3が成立する.

補題 3. $(X,Y) \in \mathcal{F}$, $Z = V-(X \cup Y)$ とし, M を G の最大マッチングとする. このとき, $\partial M \supseteq Y \cup Z$ であり, 各 $e \in M$ に関して, $\partial e \subseteq X$ であるか, $\partial e \subseteq Z$ であるか, または, e が X と Y とを結んでいる.

一般に, $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2) \in 3^V$ に対して, $X_1 \subseteq X_2$, $Y_1 \subseteq Y_2$ のとき, $(X_1,Y_1) \sqsubseteq (X_2,Y_2)$ と書く. 特に, $(X_1,Y_1) \neq (X_2,Y_2)$ のとき, $(X_1,Y_1) \sqsubset (X_2,Y_2)$ と書くことにする. この順序関係 $\sqsubseteq$ に関する $\mathcal{F}$ の最小元 (X_0,Y_0) は一意に定まり, Edmonds–Gallai 分解を与える. 極大鎖

$$(X_0,Y_0) \sqsubset (X_1,Y_1) \sqsubset \cdots \sqsubset (X_b,Y_b)$$

を考え, 各 に対して,

$$\begin{aligned}&V_0^+ = X_0, V_0^- = Y_0, && V_0 = V_k^+ \cup V_0^-\\ &V_k^+ = X_k - X_{k-1}, && V_k^- = Y_k - Y_{k-1},\\ &V_k = V_k^+ \cup V_k^- && (k=1,\ldots,b),\\ &V_\infty = V-(X_b \cup Y_b)\end{aligned}$$

†Dulmage–Mendelsohn Type Decomposition for General Graphs.

によって, V の分割 $\Pi(\mathcal{F}) = (V_0; V_1, \cdots, V_b; V_\infty)$ を得る.

補題3より, 次の定理が得られる.

定理 4. *グラフ G の任意の最大マッチングは, 分割 $\Pi(\mathcal{F})$ の各成分内を結ぶ枝のみを用いる.*

一般に歪対称行列 T が与えられたとき, T の行集合 (列集合) を頂点集合とし, $T_{ij} \neq 0$ のときに枝 (i,j) を結ぶことによって得られる無向グラフを $G(T)$ とする. グラフ $G(T)$ の頂点集合に上述の分割を施し, 行集合 (列集合) を並べ替えると, 図1のようなブロック三角形が得られる.

安藤・藤重 [1] の結果に従って, $\{V_1, \cdots, V_b\}$ は, signed poset [7] になる. この signed poset は, 歪対称行列のブロック三角化における左上部分の零・非零構造を反映している. こうして得られた一般グラフの分解を, ここでは, Dulmage–Mendelsohn 型分解と呼ぶ.

3 算法

一般グラフの Dulmage–Mendelsohn 型分解は, 以下の算法によって求められる.

ステップ 1: 最大マッチング M を計算する.

ステップ 2: 交互道によって $S = V - \partial M$ から到達できる点集合を V_0 とする.

ステップ 3: 補助グラフ $\tilde{G}_M$ を構成し, その強連結成分分解を行なう.

補助グラフ $\tilde{G}_M$ は, 頂点集合 $V - V_0$, 枝集合 $E' \cup M'$ を持つ双方向グラフである. ただし, E' は E の枝のうちで $V - V_0$ に属する点を結ぶものの集合であり, 両端点に正方向で接続している. 一方, M' はマッチング M のコピーであり, 両端点に負方向で接続している. 双方向グラフの強連結成分分解は枝の本数に関する線形時間で計算できるので, 全体の計算量は, 最大マッチングを求める手間と同じオーダーになる.

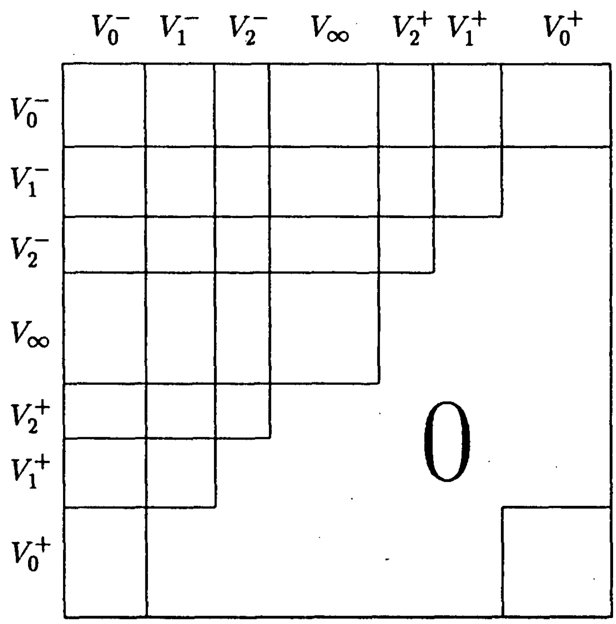

図 1. 歪対称行列のブロック三角化.

参考文献

[1] K. Ando and S. Fujishige: $\sqcup, \sqcap$-closed families and signed posets, Discussion Paper Series, No. 567, Institute of Socio-Economic Planning, University of Tsukuba, 1994.

[2] K. Ando, S. Fujishige and T. Nemoto: Decomposition of a bidirected graph into strongly connected components and its signed poset structure, *Discrete Appl. Math.*, to appear.

[3] A. Bouchet: Greedy algorithm and symmetric matroids, *Math. Programming*, 38 (1987), pp. 147–159.

[4] A. Bouchet: Matchings and Δ-matroids, *Discrete Appl. Math.*, 24 (1989), pp. 55–62.

[5] R. Chandrasekaran and S. N. Kabadi: Pseudomatroids, *Discrete Math.*, 71 (1988), pp. 205–217.

[6] A. L. Dulmage and N. S. Mendelsohn: A structure theory of bipartite graphs of finite exterior dimension, *Trans. Roy. Soc. Canada*, 53 (1959), pp. 1–13.

[7] V. Reiner: Signed posets, *J. Combin. Theory*, Ser. A, 62 (1993), pp. 324–360.