1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

再配置問題のグラフ論的性質

01605520　NTT通信網研究所　巳波弘佳　MIWA Hiroyoshi
01009550　NTT通信網研究所　伊藤大雄　ITO Hiro

1．はじめに

再配置問題とは，複数の倉庫と，それに収容されている他の倉庫に移動すべき荷物があるとき，できるだけ少ない移動回数で，荷物を目的の倉庫に移動させる問題である．

これは，通信網におけるパス再配置問題にも応用できる．通信回線（パス）は伝送路故障時の緊急待避などを繰り返し行っていると網全体での最適性が失われていくので，時々パスの再配置を行って最適化する必要が出てくる．この時，伝送路設備は有限であるので，この再配置問題のような形となる．特に交換機が2つのみの状況に限定したパス再配置問題は，本稿のモデルで表現できる．

本稿では，まず，この再配置問題を定義し，移動可能であるための必要十分条件を明らかにする．

2．諸定義

まず，再配置問題を次のように定義する．

〖再配置問題〗

倉庫集合：V　($|V| = n$)

倉庫i ($i \in V$) の容量：c_i　　(c_iは自然数)

荷物集合：E　($|E| = m$)

荷物k ($k=1,\dots,m$)の収容されている初期倉庫：s_k

荷物k ($k=1,\dots,m$)の最終移動先倉庫：t_k

荷物k ($k=1,\dots,m$)の待避可能倉庫集合：$W_k \subseteq V$

待避可能倉庫集合W_kとは，荷物kを一時的に収容することを許される倉庫の集合である．

本稿では，荷物の大きさはすべて1とする．また，一回の移動では一つの荷物しか移動できず，一つの倉庫には，同時にその倉庫容量以上には荷物を収容できないとする．

なお，移動しない荷物に関しては考慮する必要はないので，予め倉庫容量から，その倉庫に収容されている移動しない荷物数だけ減じたものを改めて倉庫容量とする．従って，$\forall k,\ s_k \neq t_k$である．

(V, c, E, W) ($c=\{c_i\}_{i \in V}$, $W=\{W_k\}_{k \in E}$) が与えられた時，すべての荷物の移動が可能であるか判定し，待避回数も含めて総移動回数が最小である移動順序を決定する．

□

再配置問題を，各倉庫iを節点，各荷物kをs_kを始点としt_kを終点とする有向枝と考えることで，有向多重グラフとして表現する．

〖定義1〗

$N=(G, c, W)$

ただし，有向グラフ$G=(V, E)$

V：節点集合　（以下$V(G)$とも表記する）

$E=\{(s_k, t_k)\}_{k \in E}$：枝集合

$W=\{W_k\}_{k \in E}$：待避可能倉庫集合

□

再配置問題の問題例は，上記のNとして表現できる．再配置問題の有向多重グラフ表現例をFig.1に示す．

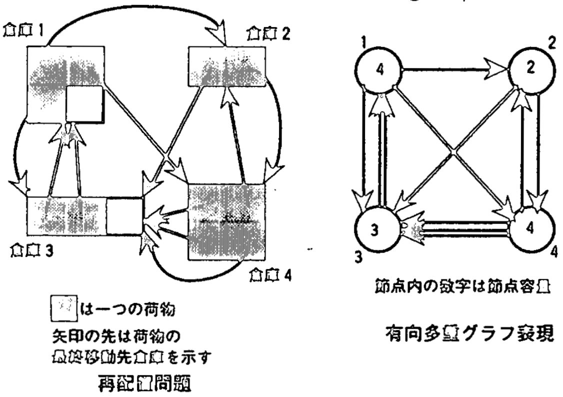

Fig.1　再配置問題とそのグラフ表現

〖定義2〗

$U \subseteq V$に対して

$G(U)=(U,E(U))$　$E(U)=\{(i, j) \in E \mid i, j \in U\}$,

$N(U)=(G(U),c,W)$,

また，$S, T \subseteq V$に対して

$E(S, T)=\{(i, j) \in E \mid i \in S, j \in T\}$

と定義する．

□

〖定義3〗

Nが与えられたときの倉庫iの空き容量b_iを次のように定義する．

$$b_i = c_i - \sum_{j \in V} |E(i, j)|,$$

□

問題の前提より，荷物は倉庫容量以上に詰めることができないから，常に空き容量は0以上である．特に，荷物が最終状態にまで移動できるためには，初期状態と最終状態でも空き容量は0以上である必要がある．それを特に容量制限則と呼ぶことにする．

〖定義4〗

（容量制限則）

$$c_i \geq \sum_{j \in V} |E(i, j)|, \quad c_i \geq \sum_{j \in V} |E(j, i)|$$

□

明らかに，Nにおいて，ある一つの荷物が倉庫iから倉庫jへ移動可能であることと，節点jの空き容量が1以上であることは同値である．また，有向多重グラフ$G|(i, j)$を，Gの節点jの容量を1減じ，枝(i, j)を一つ取り除くことによって得られるものとして定義すると，ある一つの荷物が倉庫iから倉庫jへ移動可能ならば，荷物を倉庫iから倉庫jへ移動させ，移動後の状態を新たに再配置問題として有向多重グラフ表現したものは$N'=(G|(i, j), c, W)$に一致する．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

3．待避がない場合

ここでは，すべての荷物に対して待避倉庫が与えられておらず，初期倉庫から最終移動先倉庫へ一回で移動しなければならない場合を考察する．この場合，移動可能ならば常に最小移動回数mで移動可能なので，結局，移動可能かどうかを求める判定問題となる．

次の補題は容量保存則から容易に示せる．

【補題】

N=(G, c ,W)　ただし$\forall k \in E, W_k=\phi$

が与えられた時，Nが容量制限則を満たしているならば，Gの強連結成分間に自然に入る半順序構造におけるすべての極小元Cに対し，

$$\sum_{i \in V(C)} b_i \geq E(V\text{-}V(C), V(C))$$

が成立する．

ただし半順序関係は，ある強連結成分C_1から他の強連結成分C_2に有向枝が存在するとき$C_1 > C_2$とする．

□

有向多重グラフGに対して，枝の向きを無視した無向多重グラフが連結であるとき，Gを連結と呼ぶことにする．

【定理】

N=(G, c ,W)　ただし$\forall k \in E, W_k=\phi$

が与えられた時，すべての荷物が移動可能であるための必要十分条件は，Nが容量制限則を満たし，かつGの節点数2以上の連結成分が，各々空き容量を１以上持つことである．□

証明）

まず，孤立節点はグラフから除去しても良いので，以下で扱うグラフにおいては，連結成分の節点数は常に2以上であると仮定する．

Nが容量制限則を満たしているならば，Gの極小元である強連結成分に空き容量が１以上あることは，Gの節点数2以上の連結成分の空き容量が１以上あることの必要十分条件である．（∵必要性は，Gの連結成分が，Gの強連結成分でもある場合は明らかであり，Gの1つの連結成分が2つ以上の強連結成分からなるときは，補題の式の右辺が1以上になることより，空き容量は1以上になることより分かる．十分性は明らかである．）

○必要であることの証明：

Nが容量保存則を満たしていないならば，最終移動倉庫にすべての荷物を移動できないということを示している．また，Gの節点数2以上の連結成分の空き容量が0であるようなものが存在する場合も，明らかに荷物を移動させることができない．よって必要性が示された．

○十分であることの証明：

Gの極小元である強連結成分をCとする．

I）|V(C)|≧2の場合

仮定と，この証明の最初に述べたことより，$\exists i, j \in V(C)$に対して$b_j \geq 1$なので，G|(i, j)を構成することができる．G|(i, j)のV(C)で誘導された部分グラフC|(i, j)を考える．C|(i, j)が強連結ならば，明らかにC|(i,j)の空き容量は1以上であり，更に容量保存則も満たしている．C|(i, j)が２つ以上の強連結成分に分解したとする．この時，C|(i, j)内に極小元は唯一つしか存在せず，それは節点iを含む強連結成分C(i)である．もしこの他に極小元C'が存在したとすると，取り去った枝はE(V(C'),V-V(C'))の要素でなければならないが，これは$i \in V(C')$を意味し，$i \in V(C(i))$に矛盾する．従って，極小元はC|(i, j)内にC(i)唯一つである．更に，節点iの空き容量が1に増加したことにより，C(i)の空き容量は少なくとも1である．従って，G|(i, j)の空き容量は1以上である．また，明らかに容量制限則は満たしている．

II）|V(C)|=1の場合

V(C)={c}とする．補題より，$b_c \geq E(V\text{-}\{c\},\{c\})$なので，E(V-{c},{c})に含まれる枝(i, c)(∈E)をすべて取り除き，節点cの容量から|E(V-{c},{c})|を減じることにより，$G|\{(i, c)\}_{(i, c) \in E}$を構成することができる．取り除いた枝(i, c)の始点iの属する$G|\{(i, c)\}_{(i, c) \in E}$における強連結成分には，枝(i, c)を取り除くことによって空き容量が1以上存在している．従って，$G|\{(i, c)\}_{(i, c) \in E}$の連結成分の空き容量は1以上である．また明らかに$G|\{(i, c)\}_{(i, c) \in E}$は容量制限則を満たす．

I）とII）より，仮定が満たされるならば，ある枝を取り除いて，その枝の終点の容量を1減じることにより，なお仮定を満たすようにできるので，枝数に関する数学的帰納法により，枝数を0にできることが証明できる．つまり，すべての荷物が移動可能であることが証明された．

（証明終わり）

4．まとめ

本稿では，再配置問題を定義し，待避を許さない場合に実行可能であるための必要十分条件を明らかにした．この条件の判定は，明らかに線形時間で可能である．

なお，待避が可能な場合にも，最小移動回数を算出する線形時間アルゴリズムが得られているので，別途報告する予定である[1]．

今後は，より一般的なパス網再配置問題を解決するために，荷物の大きさが異なる場合や複数の倉庫にまたがる同一種類の荷物は同時に動かさなければならないという制約がついた場合を検討する．

参考文献

[1]巳波，伊藤："再配置問題とその解法", 第30回SSOR予稿集, 1995.（投稿予定）

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．