下方リスクを考慮したポートフォリオ最適化モデル

― 平均下方部分積率(MLPM)モデルを代替するオープンL字型(OPLS)モデル ―

01505910 慶應義塾大学 枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

ポートフォリオ選択問題に対する数理計画モデルによる最初のアプローチは分散（または標準偏差）をリスク指標と考える平均・分散(Mean-Variance : MV)モデルである。一方、目標収益率に対する不足分をリスクと考える下方リスク(下方部分積率)モデルが、Bawa and Lindenberg [1] により提唱されている。本研究では下方リスクを考慮したポートフォリオ選択問題を考える。この下方リスクの長所として、竹原[2]は次の三点を挙げ、下方リスクモデルがMVモデルに代替する可能性を持つと指摘している。

(1) 期待効用最大化基準に対して整合的
(2) リスク概念が意思決定者にとってより自然
(3) システム上で実現がMVモデルと同程度に容易

ここでは対象を離散データを用いた平均下方部分積率モデル(Mean Lower Partial Moment Model : MLPMモデル)に限定する。k をリスクに対するペナルティ次数、r_G をポートフォリオ収益率の最低目標水準(フロアー)とすると、k 次の平均下方部分積率 $MLPM_k(r_G)$ は(1)式で表される。ここで、$t(=1,\ldots,T)$ は離散データを表す時点または状態(Tはその数)、r_t は t におけるポートフォリオの収益率を表す。

$$MLPM_k(r_G) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\Big\{\max(r_G - r_t, 0)\Big\}^k \qquad (1)$$

MLPMモデルは、投資家が要求する最小の期待収益率(r_E)のもとでリスクとして定義した $MLPM_k(r_G)$ を最小化するモデルである。$k=1,2$ のときは線形、2次計画問題として解くことができるが、$k \geq 3$ になると、k 次の非線形計画問題となり、$k=1,2$ のときに比べて解くことが難しくなる。ただし、$k \to \infty$ にすると、min-max型の線形計画問題として定式化できる。

そこで、本研究では、$k=\infty$ になれば、min-max型の線形計画問題として定式化できることに注目し、k 次のMLPMモデルを代替するオープンL字型(線形計画)モデルを提案する。線形計画モデルである1次と無限次のMLPMモデルで想定する無差別線を組み合わせて、k 次の無差別線を区分直線で代替することにより、k次のMLPMモデルを代替できる線形計画モデルとして定式化する。

2 オープンL字型モデル

$T=2$ の場合の図1を用いて、$k=2$ の無差別曲線を例に挙げて、MLPMモデルの代替方法を図解する。

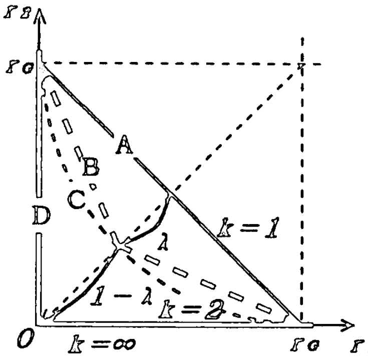

図1：$MLPM_k$ の無差別曲線とオープンL字線

A($k=1$)とD($k=\infty$)を組み合わせて(ある比率で加えて)、C($k=2$)を代替するBの区分直線を作る。この区分直線は目標ベクトル法のオープンL字型モデルで想定する無差別線に似ているので、以降、オープンL字線と呼ぶ。MLPMモデルの次数 k はリスク回避の選好(投資家の効用)を表しているので、$MLPM_1$ と $MLPM_\infty$ の無差別曲線の組み合わせを変えることにより、その形状は異なるが、リスク回避に対する選好を代替できると考える。この代替的なモデルをオープンL字型モデル(Open-L Shaped model : OPLSモデル)と呼ぶ。

$MLPM_1$ の比率を $(1-\lambda_k)$、$MLPM_\infty$ の比率を λ_k とすると、係数 λ_kの大きさがリスク回避の選好を表すペナルティ係数になる[1]。そして、(2)式の $OPLS_\lambda(r_G)$ をリスク指標として定義する。

$$OPLS_\lambda(r_G) = (1-\lambda_k)\cdot\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\max(r_G - r_t, 0)\right\} + \lambda_k \cdot \max_t\{\max(r_G - r_t, 0)\ ;\ t=1,\ldots,T\} \qquad (2)$$

OPLSモデルは、次の線形計画問題に定式化できる。

$$\min \quad OPLS_\lambda = (1-\lambda_k)\cdot\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_t^-\right) + \lambda_k \cdot d \qquad (3)$$

[1] $\lambda_k = 0$ ならば、$k=1$ に、$\lambda_k = 1$ ならば、$k=\infty$ に相当する。

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n}(r_{j,t}-r_G)\cdot x_j + d_t^- \geq 0, \quad (t=1,\ldots,T) \tag{4}$$

$$d_t^- - d \leq 0, \quad (t=1,\ldots,T) \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \cdot x_j \geq r_E \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \tag{7}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1,\ldots,n) \tag{8}$$

$$d_t^- \geq 0, \quad (t=1,\ldots,T) \tag{9}$$

$$d \geq 0 \tag{10}$$

ここで、x_j は資産 j の投資比率、$r_{j,t}$ は時点 t における資産 j の収益率、$r_j = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{j,t}$ である。
また、$r_t = \sum_{t=1}^{T} r_{j,t}\cdot x_j$ とすると、
$d_t^- = \max(r_G - r_t, 0)$, $d = \max_t\ d_t^-$ になる。

3 係数 λ と次数 k の関係のモデル化

図1のCが表す k 次の無差別曲線をBで表すオープンL字線で代替すると考えたときの λ は(11)式で表すことができる。

$$\lambda(k,T) = \frac{1}{T-1}\cdot\left(\frac{T}{\sqrt[k]{T}} - 1\right) \tag{11}$$

4 ヒストリカルデータを用いた数値実験

データは、日経225銘柄のうちNTTを除く224銘柄 ($n = 224$) の週次収益率データを用いる。期間は60週 ($T = 60$) として、1986年1月から1991年5月の間の12期間について行った。フロアー r_G を0.1%、要求する最低期待収益率 r_E を0.2%とし、$k = 1, 2, 3, 5, 10, \infty$ に対応する $\lambda(k,T)$ について数値実験を行う。

【結果】表1参照(詳しい結果は当日示す)。

数値実験の結果、λ の値が大きくなるにつれて、
◇ 収益率の最小値も大きくなる、
◇ 収益率がその最小値と同じになる期間数が増える、
◇ 収益率のフロアーを下回る期間数が増える
(下回る確率が高くなる)、
という特徴が見られた。

5 OPLSモデルとMLPMモデルの比較

モデル化した係数 λ と 次数 k の関係式も含めて、OPLSモデルの代替性について簡単な数値実験により検討する(詳しい結果は当日示す)。

表1:数値実験の結果(各期間平均)

収益率・基本統計量

$\lambda =$	0.000	0.114	0.243	0.431	0.658	1.000
平均	0.764	0.773	0.752	0.758	0.724	0.715
標準偏差	1.665	1.693	1.744	1.812	1.858	1.885
歪度	0.287	0.895	1.070	1.022	1.048	1.073
尖度	5.899	4.238	4.670	4.227	4.152	4.228
最大値	5.468	5.599	6.196	6.220	6.254	6.409
最小値	-4.152	-1.651	-1.490	-1.397	-1.360	-1.357

その他の指標

$\lambda =$	0.000	0.114	0.243	0.431	0.658	1.000
投資銘柄数	19.6	17.8	17.6	18.2	17.2	16.9
最大投資比率	0.161	0.176	0.202	0.202	0.213	0.218
$d\ (= \max d_t^-)$	4.252	1.751	1.590	1.497	1.460	1.456
$OPLS_\lambda$	0.260	0.474	0.643	0.864	1.106	1.456
$(d = d_t^-)$ の数	0.9	6.3	9.0	11.1	13.3	26.0
$(d_t^- < 0)$ の数	8.3	14.5	17.3	20.3	23.5	32.8

OPLSモデルはMLPMモデルに比べて、
◇ フロアーを下回る最大値が小さい、
◇ フロアーを下回る期間数が少ない、
◇ フロアーを下回る大きさの平均が小さい、
という特徴が見られた。これらのことをリスク管理の際に重要と考えている意思決定者に対して、OPLSモデルはこれらのメリットを与えることができる。

6 おわりに

本研究では、下方リスクを考慮して、ポートフォリオ選択問題を解くために、平均下方部分積率(MLPM)モデルを代替する線形計画モデルとして、オープンL字型(OPLS)モデルを示した。日経225銘柄を用いた数値実験を行った結果も含めて、OPLSモデルの持つ明確な特徴を見いだすことができた。さらに、モデルの比較を行い、OPLSモデルがMLPMモデルを代替できることがある程度分かった。

参考文献

[1] V.S.Bawa and E.B.Lindenberg : Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework, Journal of Financial Economics, Vol.5(1977), pp.189–200.
[2] 竹原均: 下方リスク・モデルの概要と実用上の諸問題, 証券アナリストジャーナル, Vol.32(1994), No.2, pp.1–12.