1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

相関構造を取り入れた先物為替ポジション評価モデル

住友銀行　*佐藤 秀一
01702670　筑波大学　吉田 敏弘

1　はじめに

為替市場では、市場の著しい発展に伴いマーケットリスクが増大している。このリスクヘッジ手段として有効なものに先物為替が存在する。本研究では、実際の先物為替のトレーディングに基づき、金利と為替の価格に確率的変動を仮定し、各資産間の相関構造を取り入れた先物為替ポジション評価モデルの構築を行うことを目的とする。

2　先物為替取引

先物為替取引とは、将来に発生する為替取引について、予め実行日、通貨、金額、適用される為替相場を現時点で決定し、約定する取引のことである。現時点に於ける時点Tの先物為替価格を F_0^T とすると

$$F_0^T = S_0 \exp\left\{-\int_0^T (r_f - r_d)ds\right\}.$$

ここで
S_0 : 現時点における直物為替
r_f : 時点Tまでの海外ゼロクーポンイールド
r_d : 時点Tまでの国内ゼロクーポンイールド

3　先物為替ポジション評価モデル

2．で先物為替価格が通常、一意に決定することを示したが、先物為替トレーダーは先物為替ポジションを一定期間保有することが多い。そこで、以下においてポジション評価のためのモデルを構築する。

3.1　1ファクターモデル

各原資産の従うプロセスを以下の様に仮定する。海外及び国内金利ともに、Vasicek モデルを仮定する。

$$dr_i(t) = k_i(r_{0i} - r_i(t))dt + \sigma_i dB_i(t),\ t \geq 0;\ r_i(0) = r_i.$$

ここで、σ_i, k_i, r_{0i} はいずれも正の定数で
r_{0i}: 平均的な瞬間的スポットレート
k_i: 平均 r_{0i} への回帰スピード
σ_i: ボラティリティ
B_i: 標準ブラウン運動
i : f(海外) or d(国内)
為替に関しては、国内投資家から見たリスク中立過程を考えることにし、直物為替レート（1外貨単位を交換するための邦貨単位）Sは、以下の幾何ブラウン運動に従うとする。

$$\frac{dS}{S} = (r_d(t) - r'_f(t))dt + \sigma_s dB_s(t).$$

ここで、r'_f は国内の投資家から見たリスクニュートラルな海外金利を表す。

更に、満期Tの時点tにおける先物為替の価格 F_t は

$$E^Q\left[\exp\left\{-\int_t^T r_d(u)du\right\}(S_T - F_t) \mid \mathcal{F}_t\right] = 0.$$

を満足する。ここで、E^Q は同値マルチンゲール測度の下で期待値を取ることを意味する。
各原資産に対する仮定から F_t は以下のように求まる。

$$F_t = \frac{S_t B_f(t,T)}{B_d(t,T)} \exp\left\{\frac{\sigma_f \sigma_s \rho_{fs}}{k_f}\left[(T-t) - \frac{1}{k_f}e^{-k_f(T-t)} + \frac{1}{k_f}\right]\right\}.$$

ここで、添字はfが海外金利、dが国内金利、sがスポット為替に関するパラメータであることを示す。また、$B(t,T)$ は時点tにおける満期Tの割引債の価格を示し、ρ_{fs} は為替と海外金利間の相関係数を示し、

$$dB_f dB_s = \rho_{fs} dt.$$

3.2　2ファクターモデル

金利変動をより精緻に表現するため、金利の過程としてHJMの2ファクターモデルを用いること

も考えられる。すなわち、時点t、満期Tのフォワードレート $f(t,T)$ として

$$df(t,T)=\alpha(t,T)dt+\sigma_1 d\omega_1(t)+\sigma_2 e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)}d\omega_2(t).$$

ここで、$\omega_1(t)$、$\omega_2(t)$ は、各々標準ブラウン運動であり、各フォワードドレートのパラレルシフトの要因、長短金利差を変化させる要因を示している。
1ファクターモデルと同様に先物為替価格を求めると、次のようになる。

$$F_t=\frac{S_t B_f(t,T)}{B_d(t,T)}\exp\{\frac{\sigma_s\sigma_{1f}\rho_{1fs}}{2}(T-t)^2$$

$$+\frac{4\sigma_{2f}\sigma_s\rho_{2fs}}{\lambda^2}[e^{\frac{\lambda}{2}(T-t)}-e^{-\frac{\lambda}{2}(T-t)}]\}.$$

4 パラメーターの推定

1ファクターモデルのパラメーターをGMM (Generalized Method of Moments: 一般化モーメント法) を用いて推定する。本研究で使用したデータは、1992年1月から1994年9月までの週次データで、各々以下のものを用いる。
為替：ニューヨーク外国為替市場直物終値
国内金利：ＣＤ３カ月金利の東京市場終値
外国金利：ＴＢ３カ月金利のニューヨーク市場終値
各パラメーターは次のように求められた。

$$\begin{aligned}\sigma_f &= 0.005539676 \quad (8.43020)\\ k_f &= 0.480197763 \quad (-0.10806)\\ \sigma_s &= 0.095671685 \quad (2.58262)\\ \rho_{fs} &= -0.09170309 \quad (-0.94294)\end{aligned}$$

但し、( ) 内の数字は t 値である。

また、この推定に於けるモデルの適合度を表す目的関数の値は 3.57245760(p 値： 0.3115) である。

5 先物為替ポジションのヘッジ戦略

本研究では満期が1年を越える先物為替ポジションを、満期の異なる先物為替から構成されるポートフォリオ (以下、これをヘッジ・ポートフォリオと呼ぶ) によりヘッジする方法について検討した。

すなわち、ヘッジすべき満期Ｔ年の先物為替を F_T とし、ヘッジツールとして使用する満期 i 年の先物為替の価格を $F_i(i=1,\cdots,n)$ とする。
この時、各資産のポートフォリオへの組み込み比率 α_i は、次の２次計画法を解くことによって、求められる。

目的関数

$$min\left(F_T-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F_i\right)^2$$

制約条件

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_T}{\partial S_t} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial F_i}{\partial S_t}\\ \frac{\partial F_T}{\partial r_f} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial F_i}{\partial r_f}\\ \frac{\partial F_T}{\partial r_d} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial F_i}{\partial r_d}\\ \frac{\partial F_T}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial F_i}{\partial t}\\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i &= 1\end{aligned}$$

ここでは、先物為替のショートポジションを許すので α_i は正負どちらの値も取り得る。
実際のデータを用いたシミュレーションによれば、このヘッジ戦略はかなり良好な結果を与える。

参考文献

[1] 木島正明、「ファイナンス工学入門第Ｉ・II 部」, 日科技連 (1994).

[2] Wei, J.Z.(1994),"Valuing differential swaps," *The Journal of Derivatives*, SPRING.

[3] Hamilton, J.D.(1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.