1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ニューラルネットワークによるオプション価格予測に関する考察

土肥正，畠山真明，尾崎俊治
広島大学工学部

1 はじめに

ブラック・ショールズ(BS)モデルはアウト・オブ・ザ・マネーでオプション価格を過大評価し，イン・ザ・マネーで過小評価する傾向があるという実証結果が知られている．この問題の主な原因として，BSモデルの仮定においてボラティリティが時間に関して一定であることが一般に指摘されている．そこで，ボラティリティがある確率過程に従うような確率ボラティリティモデルが現在までにいくつか提案されている[1-2]．しかし，このモデルから得られる偏微分方程式を解析的に解くことは非常に困難である．そこで本研究では，確率ボラティリティモデルに対するオプション価格をニューラルネットワークを用いて予測する方法について考察を行う．

従来までに提案されているニューラルネットワークモデルは，ボラティリティの時間変動を考慮していなかった[3-4]．これに対して，本研究ではボラティリティが時間に依存するという仮定を明示的に組み入れた予測モデルを提案し，従来の確率ボラティリティモデルとの比較を行う点が特徴となっている．

2 確率ボラティリティモデル

危険証券価格 $\{S(t), 0 \le t \le T\}$ は確率過程であり，X を $S(t)$ 上にかかれた満期時刻 T における派生証券の支払いとする．安全資産の利子率を r とし，同値マルチンゲール測度の下で定義された標準ブラウン運動過程 $\{B_s(t), 0 \le t \le T\}$，$\{B_\sigma(t), 0 \le t \le T\}$ を定義する．市場に摩擦はなく裁定取引が行われないという仮定の下で，派生証券の価格は

$$D = E[e^{-rT}X] \tag{1}$$

によって定義される．このとき，権利行使価格 K のヨーロピアン・コールオプション価格は

$$C = e^{-rT}E[\{S(T) - K\}_+] \tag{2}$$

となる．ここで，E は同値マルチンゲール測度(リスク中立測度)上で定義される期待値演算子である．

危険証券の価格過程が，

$$dS(t) = S(t)\{\mu dt + \sigma dB_s(t)\} \tag{3}$$

のようにボラティリティ σ が一定のとき，C はBS価格となり危険証券の収益率 μ とは独立になる．S_0 を時刻 $t=0$ での株価とすれば，株式コールオプションの場合，$K < S_0$ の状態をイン・ザ・マネー，$K = S_0$ の状態をアット・ザ・マネー，$K > S_0$ の状態をアウト・オブ・ザ・マネーという．

一方，ボラティリティが確率過程に従う場合のオプション評価モデルは現在までにいくつか提案されている．一般性を失うことなく，次のような表記法を用いる．

$$dS(t) = G(S(t), t)dt + H(S(t), \sigma(t), t)dB_s(t), \tag{4}$$

$$d\sigma(t) = I(\sigma(t), t)dt + J(\sigma(t), t)dB_\sigma(t). \tag{5}$$

以下では，ボラティリティ過程 $\{\sigma(t), 0 \le t \le T\}$ に対して以下の2つのモデルを紹介する．

(1) Hull-White モデル[1]:

$$G = \mu S(t),\ H = \sigma(t)S(t), \tag{6}$$

$$I = \eta\sigma(t), J = \theta\sigma(t),\ (\eta, \theta : \text{定数}). \tag{7}$$

(2) Johnson-Shanno モデル[2]:

$$G = \mu S(t),\ H = \sigma(t)S(t)^\alpha, \tag{8}$$

$$I = \eta\sigma(t), J = \theta\sigma(t)^\beta,\ (\alpha, \beta, \eta, \theta : \text{定数}). \tag{9}$$

上述の各モデルに対して，ヘッジポートフォリオを構成することによって，ヨーロピアン・コールオプション価格が満足すべき偏微分方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned} C_t &+ rS(t)C_s + \frac{H^2S^2}{2}C_{ss} + GJ\rho S\sigma(t)C_{s\sigma} \\ &+ \frac{J^2\sigma(t)^2}{2}C_{\sigma\sigma} + \{-\rho J(\mu - r) \\ &- \lambda\sqrt{1-\rho^2}J\}\frac{\sigma(t)}{H}C_\sigma = rC. \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，λ はリスク市場価格，ρ は $B_s(t)$ と $B_\sigma(t)$ の相関係数である．しかしながら，この偏微分方程式を境界条件 $C(S, \sigma, T) = \{S - K\}_+$ と $C(0, \sigma, T) = 0$ の下で解析的に解くことは困難である．

次節では無裁定条件の下で均衡価格を導出するのではなく，オプションの市場価格を精度よく推定する目的のために，ニューラルネットワークを用いたモデルを提案する．

3 ニューラルネットワークモデル

権利行使価格 K, 満期時刻 T, 安全資産の利子率 r の他に，入力変数を以下のように設定する．

CP : 株価の終値

LCP: 昨日の株価の終値

LM: 昨日のオプションプレミアム

$L\sigma$: 昨日のボラティリティ値

σ_n : 本日のボラティリティ値

η, θ: 各モデルでボラティリティを決定するのに必要なパラメーター

上述の変数を入力したとき，得られる出力結果は予測オプション価格となる．さらに，入力変数と教師信号であるオプション市場価格は $[0, 1]$ 内の実数に規格化される．各ニューロンの結合の重みを表す結合荷重 w_{ji} は一様乱数により $[0, 1]$ 内で決定される．

ネットワークを構成する内部関数は以下のようなシグモイド関数を使用する．

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\gamma x}}. \tag{11}$$

ここで，$\gamma (> 0)$ はシグモイド関数の傾斜を決定するパラメーターである．学習法は通常のバックプロパゲーション法を使用する．

4 シミュレーション結果と考察

1989 年 12 月 1 日から 1992 年 5 月 29 日までの間に東京証券取引所で取引きされた TOPIX のコールオプション価格 (4600 セット) をデータとして用いた．

第 2 節で紹介した確率ボラティリティモデルに対して，モンテカルロ法を用いて正規乱数を発生させ，各モデルのオプション価格を数値的に求めた．同様に，ニューラルネットワークモデルにおいても数値実験を行い，この結果より中間層におけるセル数を 14 個，学習範囲を 60 個に設定した．

図 1 は，確率ボラティリティモデルにおける予想オプション価格と実際のオプション価格との誤差を，図 2 はニューラルネットワークモデルにおける予測オプション価格との誤差をそれぞれ示している．図中の縦軸は誤差を表しており，正の場合はオプション価格を過大評価，負の場合は過小評価していることを意味する．横軸は状態を表しており，正の場合はアウト・オブ・ザ・マネー，負の場合はイン・ザ・マネー，0 の場合はアット・ザ・マネーを表している．図の比較より，ニューラルネットワークモデルの方が良い予測結果を示していることがわかる．

表 1 は，全状態，アウト・オブ・ザ・マネー，アット・ザ・マネー，イン・ザ・マネーの 4 つの場合における各モデルの平均二乗誤差の平均値を示している．この表より，4 つの全ての状態においてニューラルネットワークモデルが解析的モデルよりも推定の精度に関してかなり良い結果を示していることが分かる．

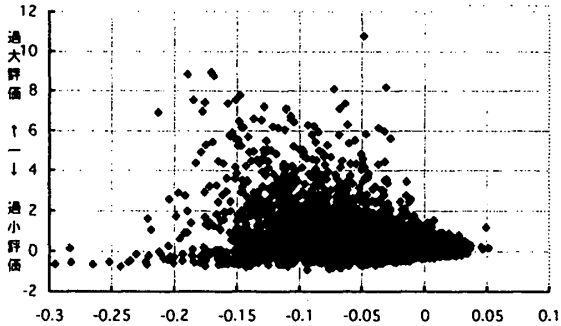

図 1. 確率ボラティリティモデルによる予測オプション価格.

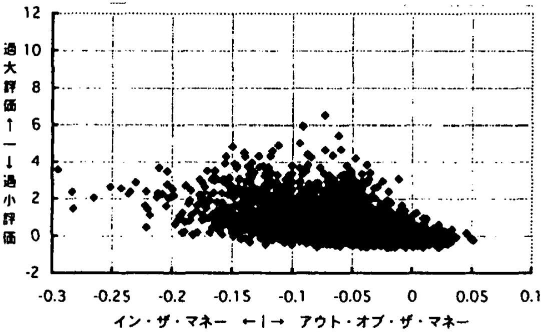

図 2. ニューラルネットワークによる予測オプション価格.

表 1. 各状態におけるモデルの比較.

	全体	out	at	in
H.W.	11.975924	0.353843	0.824178	16.087139
J.S.	13.148032	0.408049	0.904205	17.661219
N.N.	3.239096	0.212765	0.355725	4.300877

H.W.: Hull-White モデル
J.S. : Johnson-Shanno モデル
N.N. : ニューラルネットワークモデル

謝辞: オプションデータを提供頂いた筑波大学経営大学院 吉田敏弘氏に感謝申し上げます.

参考文献

[1] J. Hull and A. White, *Journal of Finance*, Vol. 42, pp. 281-300 (1987).

[2] H. E. Johnson and D. Shanno, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, pp. 143-151 (1987).

[3] M. Malliaris and L. Salchenberger, *Jounal of Applied Intelligence*, Vol. 3, pp. 193-206 (1993).

[4] J. M. Hutchinson, A. W. Lo and T. Poggio, *Journal of Finance*, Vol. 49, No. 3, pp. 851-889 (1994).