1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

組合せ最適化と凸解析

01603194　京都大学　　室田 一雄　MUROTA Kazuo

1　はじめに

凸解析の理論が非線形計画 (連続変数に関する最適化) の分野で基本的な役割を果たしていることは周知の通りである. 凸/凹関数の詳細な議論はさておき, 最適化の立場から最も基本的なものを挙げるとすれば次の二つであろう.

○ 局所最適条件が大域的最適性を特徴づける. したがって, 降下法に基づく算法によって最適化が達成される.

○ 凸関数と凹関数の間に (強) 双対性 (線形計画の双対性もこの特殊ケース) が成り立つ. これによって, 双対変数を利用した算法が構成できる.

一方, 組合せ最適化 (離散変数に関する最適化) の分野では, マトロイド的な構造 [1], [2] が「良い」性質と認知されるに至っている. すなわち, グラフやネットワーク上の組合せ最適化問題のうち, 効率的な算法の作れるものの多くにはマトロイド的な構造が内在している. その理由を端的に述べると, 次の二つになろう.

○ マトロイドでは局所最適条件が大域的最適性を特徴づけ, さらに, 貪欲算法 (greedy algorithm) によって大域的最適解が求められる.

○ Edmonds の交叉定理に代表されるような双対定理が成り立つ. これによって, 双対変数を利用した算法が構成できる.

このように凸性とマトロイド性は似ている. 事実, この類似性は既に60年代の終わりには注目され, 80年代はじめには Lovász の指摘によってその関係が明らかになったと認識されている. すなわち,

定理 1 集合関数が劣モジュラ $\Longleftrightarrow$ その Lovász 拡張が凸. □

この事実に基づき, 現在では, 「マトロイドや劣モジュラ関数の双対性＝凸解析における双対性＋整数性」という図式が広く受け入れられている.

しかし, 組合せ最適化問題と凸関数のかかわり方の中には Lovász 拡張に基づく上の図式では理解できないものもある. 例えば, 各枝のフローのコストが区分的に線形な凸関数で与えられたときの最小費用流問題は, 基本的には, コストが線形の場合と同様にして解くことができる. これと同様の事情は劣モジュラ流問題にも見られ, 最適解はポテンシャル (双対変数) によって特徴づけることができる. また, ポリマトロイド (劣モジュラシステム) の基多面体上では種々の非線形最適化問題に対して「良い」アルゴリズムが知られている [1].

本稿の目的は, 定理1のような見方をさらに発展させて, マトロイド性と凸性との関係をより明確にし, 「マトロイド性＝凸性＋整数性」という図式によって上記の現象も理解できることを示すことにある.

2　交換公理

本稿の主役は, 整数格子点の集合 $B \subseteq \mathbb{Z}^V$ 上の実数値関数 $\omega : B \to \mathbb{R}$ であって, Steinitz の交換公理に似た性質 (以下の (EXC)) を満たすものである. まず, 定

義域 B は非空有限集合であって

(B2) 任意の $x,y\in B$ と任意の $u\in \mathrm{supp}^+(x-y)$ に対して，ある $v\in \mathrm{supp}^-(x-y)$ が存在して $x-\tilde{u}+\tilde{v}\in B$ かつ $y+\tilde{u}-\tilde{v}\in B$,

を満たすと仮定する．ここで，$\tilde{u}$ は $u\in V$ の特性ベクトルを表わし，$\mathrm{supp}^+(x-y)=\{u\in V \mid x(u)>y(u)\}$ などである．上の交換公理は劣モジュラ性と次の意味で同等である．

定理 2 非空有限集合 $B\subseteq \mathbf{Z}^V$ が (B2) を満たすことは，ある劣モジュラ関数 $f: 2^V\to \mathbf{Z}$ $(f(\emptyset)=0)$ によって $B=\mathbf{Z}^V\cap \{x\in \mathbf{R}^V \mid x(X)\le f(X)\ (\forall X\subset V),\ x(V)=f(V)\}$ と書けることと同値．□

関数 $\omega: B\to \mathbf{R}$ に対して次の性質を考える (このような関数は組合せ最適化によく現れる [3])．

(EXC) 任意の $x,y\in B$ と任意の $u\in \mathrm{supp}^+(x-y)$ に対して，ある $v\in \mathrm{supp}^-(x-y)$ が存在して $x-\tilde{u}+\tilde{v}\in B$, $y+\tilde{u}-\tilde{v}\in B$ かつ

$$\omega(x)+\omega(y)\le \omega(x-\tilde{u}+\tilde{v})+\omega(y+\tilde{u}-\tilde{v}).$$

3 結果

結論を一言で述べれば次のようになる: **定義域が (B2) を満たし，関数値が (EXC) を満たすような関数 $\omega: B\to \mathbf{R}$ を「組合せ論的な凹関数」** (通常の凹関数に対応する組合せ論的な概念) **とみなすのが適当である．**

定理 1で扱われている凸性と劣モジュラ性の対応関係は，上の主張における定義域の凸性の部分にあたる．

上の主張を裏付ける事実をいくつか述べる (詳細は [3] 参照)．$p: V\to \mathbf{R}$ に対し，$\omega[p]: B\to \mathbf{R}$ を $\omega[p](x)=\omega(x)+\langle p,x\rangle$ と定義し，$\overline{B}$ によって B の凸包を表す．

定理 3 (拡張定理) ω が (EXC) を満たす $\Longleftrightarrow$ ω が次の性質をもつ凹関数 $\overline{\omega}: \overline{B}\to \mathbf{R}$ に拡張できる．性質: 任意の $p: V\to \mathbf{R}$ に対して $\mathrm{argmax}\,(\overline{\omega}[p])$ が整基多面体．□

$\omega: B_1\to \mathbf{R}$, $\zeta: B_2\to \mathbf{R}$ とし，ω と $-\zeta$ は (EXC) を満たすとする．それぞれの共役関数を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\omega^\circ(p) &= \min\{\langle p,x\rangle-\omega(x) \mid x\in B_1\},\\ \zeta^\bullet(p) &= \max\{\langle p,x\rangle-\zeta(x) \mid x\in B_2\}.\end{aligned}$$

定理 4 $\max\{\omega(x)-\zeta(x) \mid x\in B_1\cap B_2\}$
$=\inf\{\zeta^\bullet(p)-\omega^\circ(p) \mid p\in \mathbf{R}^V\}$.
($B_1\cap B_2=\emptyset$ のときの左辺の値は $-\infty$ とする.) さらに ω と ζ が整数値なら下限をとる範囲は $p\in \mathbf{Z}^V$ に限ってよい．□

定理 5 (主分離定理) $\omega(x)\le\zeta(x)$ $(x\in B_1\cap B_2)$ ならば，

$$\omega(x)\le \alpha^*+\langle p^*,x\rangle\le \zeta(x) \quad (x\in \mathbf{Z}^V)$$

を満たす $\alpha^*\in \mathbf{R}$ と $p^*\in \mathbf{R}^V$ が存在する．さらに ω と ζ が整数値なら，$\alpha^*\in \mathbf{Z}$, $p^*\in \mathbf{Z}^V$ とできる．□

参考文献

[1] S. Fujishige, "Submodular Functions and Optimization," Annals of Discrete Mathematics 47, North-Holland, 1991.

[2] 伊理・藤重・大山: 『グラフ・ネットワーク・マトロイド』, 産業図書, 1986.

[3] K. Murota, Convexity and Steinitz's exchange property, Report No. 95848-OR, Universität Bonn, 1995.