1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

無向グラフにおける k-辺分割問題の一般化について

京都大学　永持 仁　NAGAMOCHI Hiroshi
京都大学　*石井 利昌　ISHII Toshimasa
京都大学　茨木 俊秀　IBARAKI Toshihide

1　はじめに

指定辺付 k-辺分割問題とは, 無向グラフ $G=(V, E)$ の k本の辺 $e_1,\cdots,e_k$および辺数 $|E|$ の k 個の正整数への分割 $m_1+\cdots+m_k=|E|$ が与えられたとき, 次の (i)-(iii) の条件を同時に満たすように辺集合 Eを k個の部分集合 $E_1,\cdots,E_k$に分割する問題である.

(i) 各 E_iは, 指定された辺 e_iを含む,

(ii) 各 E_iの辺数 $|E_i|=m_i$,

(iii) 各 E_iに誘導される部分グラフは連結である.

グラフ Gが k-辺連結ならば, これらの条件を満たす分割が必ず存在することが知られている [1, 2]. しかし, このような分割を具体的に多項式時間で求めるアルゴリズムは $k\leq 3$ の場合にのみ知られており [3, 4], $k\geq 4$ については未解決である.

ここでは, より広い分割問題が取り扱えるように, 上の問題を次のように一般化したラベル指定 k-辺分割問題を導入する. これは, G の各点に $\{1,\cdots,k\}$ から選んだラベルを自由に付したグラフにおいて分割 $m_1+\cdots+m_k=|E|$ に対し, 次の (i)-(ii) の条件を同時に満たすように辺集合 Eを k個の部分集合 $E_1,\cdots,E_k$に分割する問題である.

(i) 各 E_iの辺数 $|E_i|=m_i$,

(ii) 各 E_iの誘導するグラフの各連結成分はラベル i のついた点を少なくとも 1 個含む.

本研究では, $k=2$, 3 の場合について, この問題の分割が存在する十分条件を与え, この条件の下で分割を見つける $O(|E|)$ 時間 ($k=2$ の場合) および, $O(|E|+|V|^2)$ 時間 ($k=3$ の場合) の多項式時間アルゴリズムを構築した. とくに, 本アルゴリズムを用いると, 上記の指定辺付 k-辺分割問題に対する $k=3$ の場合のこれまでの計算時間 $O(|E|^2)$[4] を $O(|E|+|V|^2)$ 時間に改善できる.

2　定義

$V'\subseteq V$の誘導する部分グラフを $G[V']$, $E'\subseteq E$の誘導する部分グラフを $G[E']$ と書く. 簡単のため, $G[V-V']$, $G[E-E']$ をそれぞれ $G-V'$, $G-E'$と記す. グラフ $G=(V,E)$ の互いに素な節点集合 X,Yに対し, $E(X,Y;G)\equiv\{(u,v)\in E|u\in X,v\in Y\}$, $c(X,Y;G)\equiv|E(X,Y;G)|$ とする. 特に $c(X,V-X)$ を $c(X)$ と書く. $c(X)=1$ のとき, 辺 $\{e\}=E(X,V-X)$ を橋と呼び, G の橋の集合を $B_G\subseteq E$と表す. u,v間が k-辺連結であるとは, u と vの間に互いに辺を共有し合わない路が少なくとも k本存在することを表す. そのような最大の kを u, v間の辺連結度といい, $\lambda(u,v;G)$ で表す. グラフ G の辺連結度を$\lambda(G):=min\{\lambda(u,v;G)|u,v\in V\}$ と定義する. グラフ $G=(V,E)$ と辺 $s,t\in E(s\neq t)$ が与えられているとき, 次の (1), (2) を満たす関数 $g:E\rightarrow\{1,\cdots,|E|\}$ を, 辺の s-t 番号付けという. (1) $g(s)=1,g(t)=|E|$ (2) 各辺 $e\in E-\{s,t\}$ に, $g(d)<g(e)<g(f)$ を満たす辺 d,fが隣接している.

グラフ $G=(V,E)$ は, ある正整数 kに対し, $\pi:V\rightarrow 2^k$ なる写像を持つとき, ラベル付きグラフと呼び, (G,π) と記す. $i\in\pi(v)$ なる節点 vはラベル i を持つという. $X\subseteq V$に対し, $R(X;\pi)\equiv\cup_{v\in X}\pi(v)$, $r(X;\pi)\equiv|R(X;\pi)|$ と定義する.

本研究では, ラベル指定 k-辺分割問題に対して, 次の予想を立てる.

予想 1 ラベル付きグラフ $(G=(V,E),\pi)$ において, 全ての $X\subseteq V$に対し,

$$c(X;G)+r(X;\pi)\geq k \tag{2.1}$$

が成立するならば, ラベル指定 k-辺分割問題の分割が存在する. □

この予想は, 上記の「グラフ G が k-辺連結ならば, 指定辺付 k-辺分割問題の分割が必ず存在す

る」という結果 [1, 2] の拡張になっている. 本研究では, $k=2$, 3 のとき予想 1が成立することを構成的に証明し, 実際に $k=2$, 3 に対し, それぞれ分割を得るための多項式時間アルゴリズムを与える.

定理 2.1 $k=2$, 3 のとき, ラベル指定 k-辺分割問題の分割はそれぞれ $O(|E|)$, $O(|E|+|V|^2)$ 時間で見つけることができる. □

3 定理 2.1 の証明

「辺集合 E' をラベル i に取り込む」とは, $E-E'$ の誘導するグラフを考え, 各 $e \in E'$ の両端点があればその点にラベル i をつけて $m_i := m_i - |E'|$ とし, (G, π) を $(G' = G - E', \pi')$(π' は $V(G')$ のラベルを表す写像) に変換する操作を表す.

(G, π) が (2.1) を満たすなら必ず少なくとも 1 本の辺をあるラベル i に取り込んでも, 得られたグラフにおいて (2.1) が成立することを示すことによりこの定理を証明する. ここでは, 紙面の都合上分割の手続きのみを示し, その正当性の証明は略す.

3.1 $k=2$ の場合

(i) $\lambda(G)=1$ の場合. 1 つの橋 $e=(x,y) \in B_G$ に注目する. このとき, $G-e$ における 2 つの連結成分を X, $V-X (x \in X,\ y \in V-X)$ とし, 一般性を失わず, $\{1\} \in R(X;G)$ とする. このとき, $m_1 \geq |E(G[X])|+1$ ならば, $E(G[X])$ および辺 (x,y) をラベル 1 に取り込む. $m_1 \leq |E(G[X])|$ ならば, $E(G[V-X])$ および辺 (x,y) をラベル 2 に取り込む.
(ii) $\lambda(G) \geq 2$ の場合. ラベル 1 を持った点に接続している辺の 1 つを s, ラベル 2 を持った点に接続している辺の 1 つを $t (\neq s)$ として, 辺の s-t 番号付け (g とする) を行い, $E_1 := \{g^{-1}(j) | 1 \leq j \leq m_1\}$, $E_2 := \{g^{-1}(j) | m_1+1 \leq j \leq |E|\}$ と分割する.

3.2 $k=3$ の場合

(i) $\lambda(G)=1$ の場合. 1 本の橋 $e(\in B_G)$ にしか接続していない連結成分を $X \subset V$ とする. ここで, $e=(x,y)$ $(x \in X,\ y \in V-X)$ とする. 一般性を失わず, $\{1,2\} \in R(X;G)$, $\{3\} \in R(V-X;G)$ とする. このとき, $m_1+m_2 \geq |E(G[X])|+1$ ならば, $(G[X+y], \pi)$ において, ラベル 1,2 を持つ $k=2$ の問題として解く. この手続きを行う際, 得られたグラフにおいて (2.1) が成立するように工夫する (詳細は省略). $m_1+m_2 \leq |E(G[X])|$ ならば, $E(G[V-X])$ と辺 (x,y) をラベル 3 に取り込む.
(ii) $\lambda(G)=2$ の場合. $\lambda(x,y;G) \geq 3$ を満たす x, y があれば全て 1 点に縮約してできるグラフ $G' = (U, D)$ において, 異なる 2 つの単純なサイクルはたかだか 1 点しか共有し合わない (この共有点の集合を U_0 とする). グラフ G' において, 隣り合うサイクルが一つ以下であるサイクルを $C_1, \cdots, C_p$ とし, $C_i - U_0$ に対応する G の点集合を X_i とする. (a) $r(X_i)=1$ である X_i が存在する場合, (b) $r(X_i)=2$ である X_i が存在する場合, (c) (a)(b) 以外の場合, つまり全ての X_i について $r(X_i)=3$ の場合, の 3 通りのそれぞれの場合について, 上のような手続きを (2.1) を保ったまま行う. 詳細は省略する.
(iii) $\lambda(G) \geq 3$ の場合. 任意のラベルを 1 つを選んで, それに接続する辺を 1 本そのラベルに取り込む.

4 おわりに

今後の課題は, 一般の k に対するラベル指定 k-辺分割問題を解くこと, $k \geq 4$ の場合の k-辺連結グラフの指定辺付 k-辺分割問題の多項式時間アルゴリズムを求めることなどである.

参考文献

[1] E. Györi: "On division of connected subgraphs," *Combinatrics (Proc. 5th Hungarian Combinational Coll.*, Keszthely(1976)), North-Holland, Amsterdam(1978), pp.485-494.

[2] L. Lovász: "A homology theory for spanning trees of a graph," *Acta math. Acad. Sci. Hunger*, 30(1977), pp.241-251.

[3] H. Suzuki, N. Takahashi and T. Nishizeki: "A linear algorithm for bipartition of biconnected graphs," *Information Processing Letters*, 33(1990), pp.227-232.

[4] K. Wada and K. Kawaguchi: "Efficient algorithmus for tripartitioning triconnected graphs and 3-edge-connected graphs," unpublished manuscript.