1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

制約充足問題 (CSP) に対するタブー探索の適用

京都大学　*野々部 宏司　NONOBE Koji
01001374 京都大学　茨木 俊秀　IBARAKI Toshihide

1 はじめに

制約充足問題 (Constraint Satisfaction Problem, CSP) は, 人工知能や組合せ数学など諸分野の問題, 例えば, グラフの彩色問題, 命題論理式の充足可能性問題 (SAT), Set-covering, 時間割作成問題など様々な問題を定式化できる一般的枠組みである. 当初, CSP に対する解法として, backtracking 法などの厳密解法が主に研究されてきたが, CSP は NP 完全問題であり, 実用性の観点からは, 厳密解を求めるアルゴリズムより近似アルゴリズムが重要と考えられる. 実際, CSP に対し, local search などの近似解法が特に大きな問題に対して効果的であるという報告が最近なされている [1, 5]. そこで本研究では, メタヒューリスティックスの1つとして注目されている, タブー探索 [2, 3] を用いて CSP を近似的に解くことを考える.

2 定義

CSP は, それぞれ有限離散領域 D_iを持つ n 個の変数 X_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ と, m 個の制約 $C_l(X_{l_1}, \cdots, X_{l_{t_l}})$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ で定義され, 全ての制約を満たすように, 各変数 X_iの値 $\in D_i$を決定する問題である. ここで, 制約 C_l は変数 $X_{l_1}, \cdots, X_{l_{t_l}}$に対する t_l-項制約であり, それらの変数に対する値の組全てから成る直積 $D_{l_1} \times \cdots \times D_{l_{t_l}}$のある部分集合である. 全ての制約を満たすような値の組を解と呼び, 与えられた CSP に対して解が存在すればその解の1つが, 存在しなければ no が出力となる. (しばしば, 全ての解を求める場合も考察されるが, 本研究では解を1つだけ求める場合に限る.)

ここで, 変数 X_iと値 j $(\in D_i)$ の組それぞれに対して, 値変数 x_{ij}を

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{変数 } X_i \text{が値 } j \text{をとる} \\ 0, & \text{その他} \end{cases},$$

と定義し, 割当てを$\sum_{i=1}^{n} |D_i|$ 次元の 0-1 ベクトル $x = (x_{ij} | 1 \leq i \leq n, j \in D_i)$ で表す. ここで,

$$\sum_{j \in D_i} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.1)$$

が成立すれば, 全ての変数 X_iにおいて値が1つ割当てられていることになる.

CSP が与えられると, その各制約 C_lをいくつかの不等式で表し, 全制約を

$$\sum_{i,j} a_{k,ij} x_{ij} \leq b_k, \quad k \in K_l, l = 1, 2, \cdots, m \quad (2.2)$$

のように書くことができるので, CSP を 0-1 計画問題とみなすこともできる. どちらの表現がより有効であるかは, CSP が対象とする問題によるが, OR に現れるような問題では, 不等式表現が適していることが多い. 例えば, 値 j_1をとる変数の数を n_1個以下にするには, $\sum_i x_{ij_1} \leq n_1$ とすればよい.

3 アルゴリズム

タブー探索では式 (2.1) を満たす割当てから成る探索空間 X^*を考える. また, $x \in X^*$の近傍 $N(x)$ を, ある1つの変数 X_iの値 jを他の値 j'に変えることによってできる割当て $x^{(i,j')}$の全てとする. すなわち, $|N(x)| = \sum_{i=1}^{n}(|D_i| - 1)$. さらに, 目的関数を

$$f(x) = \sum_k \max(\sum_{i,j} a_{k,ij} x_{ij} - b_k, 0), \qquad (3.1)$$

とすると, 本来決定問題である CSP を最小化問題として扱うことができる. すなわち, 目的関数値を0にすることと, 与えられた CSP が解を持つことは同値である.

なお, 式 (3.1) の $f(x)$ を最小化するという観点に立てば, 不等式制約 (2.2) を必ずしも陽に持つ必要はないことに注意しておく. 特に, 複雑な制約を式 (2.2) の形に書くために多くの不等式を要したり, 新たな変数を導入することが要求される場合には, 等価的に式 (3.1) の $f(x)$ が計算できるような「目的関数評価アルゴリズム」で代用することができる. 一般には, 制約条件と目的関数を

うまく分担すれば, 定式化を簡潔化でき, CSP の成功の 1 つのポイントと考えられる.

タブー探索の枠組み [2, 3] としては, 現在, 短期メモリと長期メモリを用いた基本的なものを考えている. 探索の各反復において, タブーリストに記憶させる属性は値が 0 から 1 に変わった値変数 x_{ij} とする. また, 各反復において, x から $x^{(i,j)} \in N(x)$ への変更による目的関数値の変化 $f(x^{(i,j)}) - f(x)$ を評価し, 近傍 $N(x)$ の中から最良な近似解 (割当て) を求める際に, 不等式制約 (2.2) で記憶されている部分については, $a_{k,ij} \neq 0$ である係数をポインタでつなげておくことで, 前反復における評価値を効率よく修正するなどの工夫を加えている.

4 適用例

例として, 釣合い不完備ブロック計画 (Balanced Incomplete Block Dsign, BIBD) [4, 6] を取り上げる. これは v 個の元の集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_v\}$ に対し, 次の条件を満たす位数 k の部分集合 (ブロック) b 個の集まりを求める問題である.

1. どの元 a_i もちょうど r 個のブロックに現れる.
2. どの 2 元 a_i, a_j もちょうど λ 個のブロックに両者同時に現れる.
3. $k < v$.

明らかに, $bk = vr$, $r(k-1) = \lambda(v-1)$ が必要である.

BIBD を CSP に定式化すると以下のようになる. $n = bv, D = \{0,1\}$ $(d = 2)$ で, ブロック i と元 a_j の組を変数 $X_{(i,j)}$ と対応させ, $X_{(i,j)} = 1$ $(X_{(i,j)} = 0)$ は, ブロック i に元 a_j が含まれる (含まれない) ことを意味するものとする. (これらに対し, 値変数 $x_{(i,j),1}$ と $x_{(i,j),0}$ が導入される.) さらに, ブロック i と 2 元の対 $(a_j, a_{j'})$ $(1 \leq j < j' \leq v)$ の組に対して, 変数 $y_{i,(jj')}$ を, $y_{i,(jj')} = x_{(i,j)1} x_{(ij')1}$ で定義する. これにより, BIBD の制約は

$$\sum_j x_{(i,j)1} \leq k, \qquad \text{for all } i,$$

$$\sum_i -x_{(i,j)1} \leq -r, \qquad \text{for all } j,$$

$$\sum_i y_{i,(jj')} \leq \lambda, \qquad 1 \leq j < j' \leq v.$$

で表せ, 制約式の数 m は, $b+v+\binom{v}{2} = b+\frac{1}{2}v(v+1)$ となる. しかし, 変数 $y_{i,(j,j')}$ を陽に導入せず, 対応する目的関数値のみを計算するアルゴリズムを加えると, ずっと簡潔な表現となり, タブー探索の反復に要する時間も相当短縮される.

なお, 計算結果等, 詳細は当日報告させて頂く.

5 おわりに

タブー探索は非常に柔軟な枠組みであり, すでに色々な手法が提案されている. 今後, 様々なアイデアを取り入れ, 探索能力を高めていくと共に, CSP に定式化される多様な問題を扱っていきたい.

謝 辞

最大安定集合問題を解くタブー探索のプログラムを提供して下さった東京商船大学の久保幹雄氏に深く感謝致します. また, 数多くの助言を与えて頂いた永持仁助教授, 茨木智助手, 柳浦睦憲助手をはじめ茨木研究室の諸氏に厚くお礼申し上げます. なお, 本研究は一部文部省科学研究費によっている.

参考文献

[1] A. Davenport, E.Tsang, C. J. Wang and K. Zhu: "GENET: A connectionist architecture for solving constraint satisfaction problems by iterative improvement", *Proc. AAAI-94* (1994) 325-330.

[2] F. Glover: "Tabu search - Part I", *ORSA Journal on Computing* **1(3)** (1989) 190-206.

[3] 久保幹雄: 離散構造とアルゴリズム (6 章), 近代科学社 (1995 年出版予定).

[4] C. L. Liu: "Introduction to combinatorial mathematics", McGrew-Hill Book Company (1968). (伊理 正夫, 伊理 由美 共訳: 組合せ数学入門 II, 共立全書 (1972).)

[5] B. Selman, H. A. Kautz and B. Cohen: "Noise strategies for improving local search", *Proc. AAAI-94* (1994) 337-343.

[6] I. Semba: "Combinatorial algorithms using boolean processing", 京都大学学位論文 (1994).