1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

TSPに対する発見的手法の確率的解析

奈良先端科学技術大学院大学　*岡田 正浩　OKADA Masahiro
田地 宏一　TAJI Kouichi
福島 雅夫　FUKUSHIMA Masao

1　はじめに

巡回セールスマン問題(TSP)に対しては，古くから局所探索法等の多くのヒューリスティックス(発見的手法)が提案されている[1]．しかし，計算時間や，解の精度に対する理論的な結果は少なく，多くの場合，計算機実験により評価を行なっている．

このような計算機実験に頼った評価はある一定回数の試行を繰り返す必要がある．また，一回の試行に時間のかかる手法であった場合には，正しい評価を下すために必要な回数の試行が困難な場合もある．そこで確率的手法を用いてヒューリスティックスを評価することが有効であると考えられる．

ここでは，TSPに対する2-opt法について考える．まず枝の長さを確率分布によって表現し，一回の反復によって生じる確率分布の変化を計算することにより，十分な精度の近似解が得られたときの巡回路の長さや，それに要する反復回数などを推定することを試みる．

2　2-opt

2-opt法とは，ある初期解から始め，巡回路においてある枝のペアを取り去り，別の枝のペアを付け加えて巡回路を再構成することを考え，巡回路の長さが短くなる場合には枝を入れ換え，長くなる時には入れ換えないということを行なう．この操作を，これ以上短くならなくなるまで繰り返す．

例えば図1において枝のペアAとBを取り去り，枝のペアCとDと入れ換えることを行なうのが2-optでの一回の反復になる．ここである枝のペアを取り去った場合にそれと入れ替わりに巡回路に付け加える枝のペアは一意に決まる(以下，巡回路のある枝のペアに対して，それに対応して巡回路に付け加えられる枝のペアのことを"対応する枝のペア"と呼ぶ)．

また，ある巡回路において枝を入れ換える組合せの数はn都市問題の場合には$n(n-3)/2$通りある．以下ではこれをmとおく．

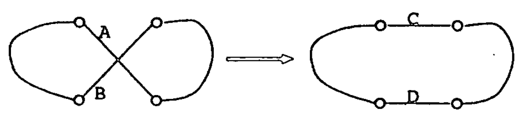

図 1: 2-opt 近傍

2-optのような局所探索を行なう場合，各反復において近傍から候補を選ぶ方法にはいくつか考えられるが，ここでは確率的取り扱いの容易さを考慮して，近傍からランダムに選ぶ場合について考える．

3　確率モデル

第k反復において巡回路に含まれている枝のペアの長さの和を確率変数Xとしたとき，その確率密度関数，分布関数をそれぞれ$f_k(x)$, $F_k(x)$とする．また，それに対応する枝のペアの長さの和を確率変数Yとしたとき，その確率密度関数，分布関数をそれぞれ$g_k(y)$, $G_k(y)$とする．

簡単のため，巡回路に含まれている枝のペアの長さの和Xとそれに対応する枝のペアの長さの和Yは(厳密にはそうではないが)独立であると仮定する．

2-optにおいてk回目の反復を考える．巡回路に含まれる枝のペアの長さの和が$[x, x+dx]$の微小区間にある確率は$f_k(x)dx$である．対応する枝のペアの長さの和がxより短くなる確率は$G_k(x)$であり，そのときに限り入れ換えが起こるので，その枝のペアが巡回路から取り除かれる確率は$G_k(x)$となる．同様に，巡回路のある枝のペアに対応する枝のペアの長さの和が$[x, x+dx]$の微小区間にある確率は$g_k(x)dx$であり，これと対応する巡回路の枝のペアがそれより長い確率は$1-F_k(x)$である．従って，その枝のペアが巡回路に加わる確率は$1-F_k(x)$となる．

一方，k回目の反復で巡回路に含まれる枝のペアの長さの和が$[x, x+dx]$の微小区間にある枝のペアの数は$mf_k(x)dx$であるのでこの数から長さの和がxである枝のペアが巡回路から取り除かれる確率$(G_k(x)f_k(x)dx)$を引き，長さの和がxである枝のペアが巡回路に加わる確率$(\{1-F_k(x)\}g_k(x)dx)$を足せば$mf_{k+1}(x)dx$となる．まとめると，以下の近似式が得られる．

$$
\begin{aligned}
f_{k+1}(x)dx &\cong f_k(x)dx \\
&\quad + \frac{1}{m}[\{1-F_k(x)\}g_k(x)dx - G_k(x)f_k(x)dx] \\
g_{k+1}(x)dx &\cong g_k(x)dx \\
&\quad + \frac{1}{m}[G_k(x)f_k(x)dx - \{1-F_k(x)\}g_k(x)dx]
\end{aligned}
$$

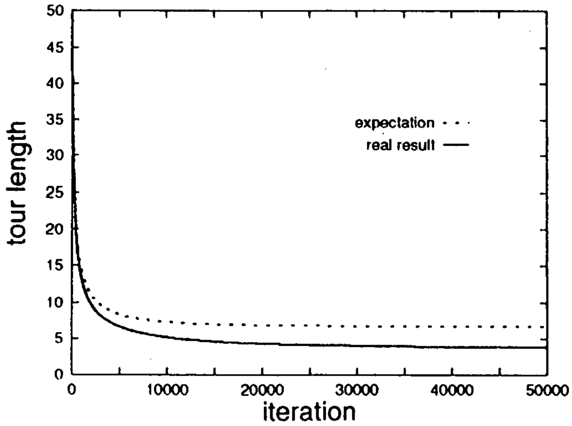

図 2: 巡回路の長さ (100 都市)

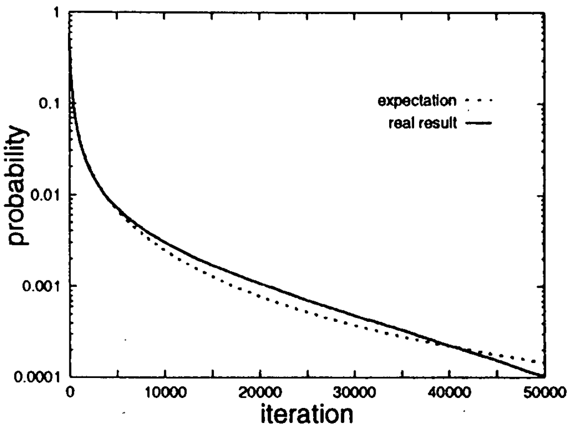

図 3: 枝の入れ替わる確率 (100 都市)

しかし, この近似式では, 対応する二組の枝のペアのみに着目しているが, 実際には全体で m 個の枝のペアの組合せのなかで, 二本のうち一本のみ入れ替わるものがある. それらを考慮してより確率を正確に評価したものが以下の近似式である. (ここでは詳細な議論は省略し, 結果のみ示す)

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &\cong f_k(x) \\ &+\frac{2}{n}[\{1-F_k(x)\}g_k(x)-G_k(x)f_k(x)] \\ g_{k+1}(x) &\cong g_k(x) \\ &+\frac{2}{m}[G_k(x)f_k(x)-\{1-F_k(x)\}g_k(x)] \end{aligned}$$

また, k 反復後の巡回路の長さの期待値は次式で表される.

$$L_k = \frac{n}{2}\int_0^\infty x f_k(x)dx$$

4 確率分布の収束

ここで, 上の近似式を等式とみなして, $f_{k+1}(x)$, $g_{k+1}(x)$ を積分すると,

$$\begin{aligned} F_{k+1}(x) &= F_k(x)+\frac{2}{n}\{1-F_k(x)\}G_k(x) \\ G_{k+1}(x) &= G_k(x)-\frac{2}{m}\{1-F_k(x)\}G_k(x) \end{aligned}$$

が得られる. この式より

$$\begin{aligned} nF_{k+1}(x)+mG_{k+1}(x) &= nF_k(x)+mG_k(x) \\ &= nF_0(x)+mG_0(x) \end{aligned}$$

となり, $nF_k(x)+mG_k(x)$ は反復によって変化しない. ただし, $F_0(x)$, $G_0(x)$ は初期解での分布を表す.

この性質を用いると, $F_k(x)$ のみの式が得られ,

$$\begin{aligned} F_{k+1}(x) &= F_k(x) \\ &+\frac{2}{m}\{1-F_k(x)\}\{H(x)-F_k(x)\} \\ H(x) &= \frac{nF_0(x)+mG_0(x)}{n} \end{aligned}$$

となる. ここで, $k\to\infty$ とすれば, $F_k(x)$ は収束し, その極限は次式で与えられる,

$$\lim_{k\to\infty} F_k(x) = \min\{H(x),1\}$$

これから局所解における巡回路の長さの期待値を計算することができる.

5 計算機実験

実際にテスト問題を生成して計算機実験を行なった結果と, 確率モデルによる結果を比較した.

A. 枝の長さを枝毎に独立な [0,1] の乱数とした場合.

B. 各都市を [0,1]×[0,1] の二次元平面上に一様にランダムに配置し, 枝の長さは節点間の Euclid 距離として定義した場合.

という二種類の場合について, それぞれ $n=100$ と $n=1000$ の場合について行った. 問題 A に対する結果を, 図 2, 図 3に示す. 問題 B に対する結果は発表時に示す.

参考文献

[1] Gerhard Reinelt, *The Traveling Salesman: Computational Solutions for TSP Applications*, Springer-Verlag, 1994.