重複訪問巡回セールスマン問題

01300450　日本大学　髙橋磐郎　TAKAHASHI Iwaro
01404360　日本大学　西澤一友　NISHIZAWA Kazutomo
住商情報システム　*栗田晶子　KURITA Akiko

§１．重複訪問巡回セールスマン問題とは

巡回セールスマン問題（ＴＳ）は、出発点（デポ）から各店を、最小総距離でまわって、デポに戻るルートを求める問題であるが、ここでは各店iに巡回すべき頻度f_iが指定されている問題を考え、これを重複訪問巡回セールスマン問題（ＭＴＳ）と呼ぶことにする。この問題は、ある地域に点在するタバコ店にタバコを配分する場合、店の規模や環境によって、一定期間に訪問すべき回数が個別に指定された場合、どのようなルートをまわれば総距離が最小になるかを求める問題から起こったものであるが、類似の問題は数多くあると思う。

ＭＴＳの最適解を出すことは、店数Nが大きい場合、多項式オーダではおさまらないから到底不可能であるが、ここでは、輸送問題の木解法を巧みに応用した効率のよい近似解法を与える。

なお、ここでは一日（単位期間）に訪問する延店数をLと限定した問題について解析する。

§２．ＭＴＳの定式化

N個の店の番号をi=1, 2, ･･･, Nとし、i=0をデポとする。d_{ij}をiからjへの距離、x_{ij}をiからjへ行くなら１、そうでなければ０、f_iを店iの訪問回数、Lを１日の訪問店数とするとき、ＭＴＳの問題は次の(1), (2), (3)として定式化される。

$$(1)\quad z=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} d_{ij}x_{ij} \to min$$

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{j=0}^{N} x_{ij} = f_i & (i=0\sim N) \\ \sum_{j=0}^{N} x_{ji} = f_i & (i=0\sim N) \\ x_{ij}=0,1,\quad x_{ii}=0 & (i,j=0\sim N) \end{cases}$$

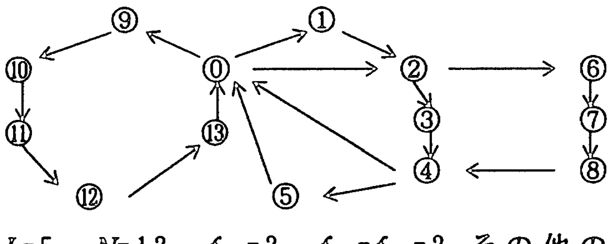
(1), (2)はいわゆる割り当て問題で簡単に解けるが、その解x_{ij}によって作られるルート（図１）が作るサイクルがすべてデポから出て（このようなサイクルを根付きサイクルと呼ぶ）いて、その長さ（サイクル中に含まれる店数）がちょうどLとなっていれば、それが最適解であるが、一般にはデポから離れたサイクル（これを浮サイクルと呼ぶ）があったり、根付きサイクルでも長さがLにならないものがある。そこで

(3)浮サイクルがなく、根付きサイクルの長さはすべてL

という条件を付加した(1), (2), (3)の解が求めるＭＴＳの最適解となる。当然ながら解が存在するためには次の条件が必要である。

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{N} f_i = L\cdot f_0$$

図１の例は(2), (3)を満たす解である。しかし、ここで注意すべきことは2, 4のように行き先が２通り以上になる点に対しては、そのルートが一意に定まらないことである。たとえば023450, 02340, 0267840　など色々なサイクルが考えられる。その点については次の§のサイクル構成の手順で述べる。



L=5, N=13. f_0=3, f_2=f_4=2, その他のf_iはすべて1. x_{ij}=1 なら$i\to j$, x_{ij}=0 ならiとjは結ばれない

図１　ＭＴＳの一例

この研究は住商情報システムＫ.Ｋ.から提供された問題である。

§３．ＭＴＳの解法

(a)重複訪問割り当て問題（(3)を除いた(1),(2)のみの問題）を解く。これはヒッチコック型輸送問題として簡単に解ける[1]。ここでは双対木解法を用いた。解いた結果、図１のように$x_{ij}=1$ならiとjを枝で結び、$x_{ij}=0$なら結ばない。

(b)サイクル構成－(a)の結果からサイクルを作る；デポ0から出発し、f_iの小さい順に（f_iの値が同じなら店番の若い順）枝をたどって、ルートを構成して行く。一度たどった枝は削除する。デポ0に戻ればこのルートは１つの根付きサイクルを構成する。再びデポから出発し、同様のことを繰り返して行く。これをf_0回繰り返す。

デポにつながっていない店は浮サイクルに属していることになるが、浮サイクルは、ここでは陽に構成する必要はない。

こうして作られるf_0個の根付きサイクルのうち長さが$L+1$以上のもの（これを長サイクルと呼ぶ）を$R_1, R_2,\cdots,R_m$それらの長さを$r_1, r_2,\cdots,r_m$、$L-1$以下のもの（これを短サイクルと呼ぶ）を$S_1,S_2,\cdots,S_n$それらの長さを$s_1,s_2,\cdots,s_n$とする。（長さがちょうどLのサイクルはすでに(3)の条件を満たしているから以下の配分問題には無関係となる）

(c)配分問題

長サイクルR_iの$\overline{r_i}=r_i-L$個の余分の店および浮サイクルに属する店（これらを$t_1,t_2,\cdots,t_k$としておく）を短サイクルS_jの不足分$\overline{s_j}=L-s_j$に、次の方法で配分する。ここで

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{m}\overline{r_i}+k=\sum_{j=1}^{n}\overline{s_j}$$

が成り立つことが(4)から導かれることに注意しておこう。

R_iからS_jへの距離D_{ij},t_αからS_jへの距離$D'_{\alpha j}$を

$$D_{ij}=min\{d_{\alpha\beta}\mid \alpha\in R_i,\beta\in S_j\},$$
$$(6)\quad D'_{\alpha j}=min\{d_{\alpha\beta}\mid \beta\in S_j\},$$
$$(i=1\sim m,\ j=1\sim n,\ \alpha=1\sim k)$$

で定義し、これらを輸送単価とする図２のようなヒッチコック輸送問題を解く。この解をy_{ij}（R_iからS_jへの輸送量）($i=1\sim m,\ j=1\sim n$)、$y'_{\alpha j}$（t_αからS_jへの輸送量）($\alpha=1\sim k,\ j=1\sim n$)とする。

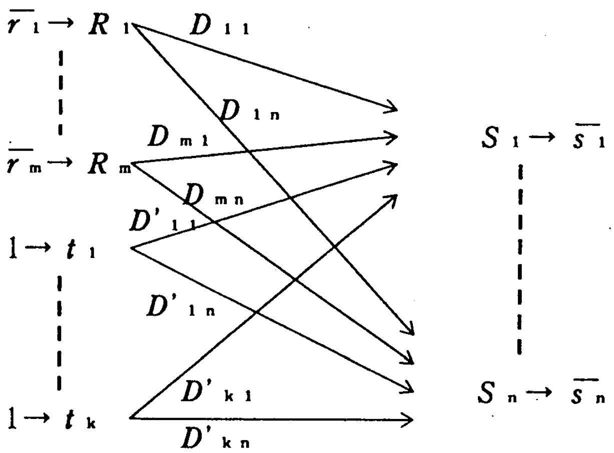


図２　配分のためのﾋｯﾁｺｯｸ輸送問題

$j=1\sim n$に対してS_jの不足分s_j個を次のようにR_i,t_αから配分する；各αに対して$y'_{\alpha j}$はどれか１つのjに対して$y'_{\alpha j}=1$, 残りのjに対して0となるから、t_αは$y'_{\alpha j}=1$となるS_jに配分する。各iに対してR_iからS_jへ最寄りのy_{ij}店を配分する。

これら配分された店をS_jの店と合流したL店について新たにＴＳ問題を解く。

§４．あとがき

この解法の特徴は(1),(2)の重複訪問割り当て問題と、図２の問題が異なる問題でありながら、ともに同一のヒッチコック型輸送問題として全く同じアルゴリズムで解くことができることにある。また(a)のステップでは浮サイクルに属する店ができるだけ少なくなることが望ましい。そこでデポからの距離d_{0j}($j=1\sim N$)のみを$\log d_{0j}$とする対数変換を行うことによって効率を高めるというアイディアも考えられる。

参考文献

[1]伊理正夫、古林隆：「ネットワーク理論」日科技連、１９９２