1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ＡＨＰ法の整合度および重要度に関する感度分析

北海学園大学　*大西 真一　OHNISHI Shin-ichi
北海道大学　今井 英幸　IMAI Hideyuki

1. はじめに

ＡＨＰ法（階層分析法）は1977年にSaatyによって提案された意思決定の一手法である[1]．その内容は一対比較に基づく評価行列から各レベルの評価項目間の重要度を求め，最終的に代替案の順序づけを行うものである．またこれはファジィ集合のメンバーシップ関数の求め方を提供している[2]．

本研究ではＡＨＰ法で用いる一対比較行列に摂動を与えた場合の整合度と重要度の変動について感度分析を行い，最も影響を与える評価行列の要素を調べることを考える．

2. ＡＨＰ法の概略と整合度

ＡＨＰ法の概略は以下のとおりである．

(1) 複雑な状況下にある問題を階層構造に分解する．ただし，階層の最上層は１個の要素からなり，総合目的である．それ以下のレベルでは意思決定者の主観的判断により，いくつかの要素（評価項目）が１つ上のレベルの要素との関係から決定される．階層の最下層に代替案を置く．

(2) 各レベルの要素間の重み付けを行う．そのために，ある１つのレベルにおける要素間の一対比較を行い，評価行列を得る．この一対比較行列 A の要素 a_{ij} は評価項目 i が j と比べて，どの程度重要であるかによって $1/9, 1/8, \ldots, 1, 2, \ldots, 9$ の値をとり，

$$a_{ji} = 1/a_{ij} \tag{1}$$

とする．

以上のようにして得られた各レベルの一対比較行列から，各レベルの要素間の重み（重要度）を計算する．重要度の計算にはいくつか方法があるが，本研究では一対比較行列の最大固有値に対する固有ベクトルを用いる．

(3) 各レベルの要素間の重要度を用いて階層全体の重み付けを行う．これにより，総合目的に対する各代替案の優先順位が決定する．

あるレベルにおいての一対比較行列 $A = (a_{ij}),\ i, j = 1, \ldots, n$ について，意思決定者の判断が完全に首尾一貫していると，$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ が成り立っている．このときの A の最大固有値は$\lambda_a = n$ となることから次の整合性の判断基準C.I.が定義されている．

$$\mathrm{C.I.} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\lambda_a - n}{n-1} \tag{2}$$

C.I.の値が大きくなるほど不整合度が高いと考えることができる．経験的に C.I. < 0.1 なら整合度は高いと判断してよいとされている．

3. ＡＨＰ法における感度分析

実際の一対比較においては状況が複雑になれば一対比較行列が整合しなくなる可能性があり，整合性が悪い場合には解析結果の数値が信頼性に欠けるものになることが考えられる．したがってある成分 a_{ij} が整合性に与える影響を評価することは結果の信頼性を知る上で重要である．

また結果として重要度にあまり差がないため，どの代替案を選択するか決定しにくい場合がある．ここで重要度を決める固有ベクトルに対して，一対比較行列の成分がどのように影響を与えているかを調べることは，結果の解釈に手がかりをもたらす．

そこで，一対比較行列の要素に対して感度分析 [3] を行う．つまり a_{ij}に摂動 $\varepsilon a_{ij}d_{ij}$ を与えたときの整合度と重要度の変動を評価することを考える．

$A(\varepsilon)=A+\varepsilon D_A,\ D_A=(a_{ij}d_{ij})$ とすると，(1) 式から $d_{ji}=-d_{ij}$が成り立つ．Aは正行列なのでペロン-フロベニウスの定理 [4] からその最大固有値（フロベニウス根）は単純根であり，AとA'のフロベニウス根は等しい．これらの性質から次の定理を得る．

定理 1. Aのフロベニウス根をλ_a，それに対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{x}_1=(x_{1i})$，$A'$のフロベニウス根$(=\lambda_a)$に対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{x}_2=(x_{2i})$とすると，$A(\varepsilon)$のフロベニウス根$\lambda(\varepsilon)$および対応する固有ベクトル$\boldsymbol{x}_1(\varepsilon)$は

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda_a+\varepsilon\lambda^{(1)}+o(\varepsilon), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x}_1(\varepsilon)=\boldsymbol{x}_1+\varepsilon\boldsymbol{v}^{(1)}+\boldsymbol{o}(\varepsilon) \tag{4}$$

と表すことができる．ただし

$$\lambda^{(1)}=\frac{\sum_{i<j}^{n}(x_{2i}a_{ij}x_{1j}-x_{2j}a_{ji}x_{1i})d_{ij}}{\sum_{i}^{n}x_{2i}x_{1i}}, \tag{5}$$

$\boldsymbol{v}^{(1)}$は

$$(A-\lambda_a I)\boldsymbol{v}^{(1)}=-(D_A-\lambda^{(1)}I)\boldsymbol{x}_1 \tag{6}$$

を満たすn次元ベクトル，$\boldsymbol{o}(\varepsilon)$は全ての要素が$o(\varepsilon)$である$n$次元ベクトルを表すものとする．

3.1. 整合度の感度分析

整合度の定義式 (2) と定理 1 から次の系が得られる．

系 1. 摂動を与えた一対比較行列$A(\varepsilon)$の整合度 C.I.(ε) は

$$\mathrm{C.I.}(\varepsilon)=\mathrm{C.I.}+\frac{\lambda^{(1)}}{n-1}\varepsilon+o(\varepsilon). \tag{7}$$

上の系から，整合度に最も影響を与える評価行列の要素は$\lambda^{(1)}$に最も影響を与える成分である．ゆえに，(5) 式のd_{ij}係数$(x_{2i}a_{ij}x_{1j}-x_{2j}a_{ji}x_{1i})$の値から C.I.$(\varepsilon)$に対する摂動の影響を評価することができる．

3.2. 重要度の感度分析

$\sum(x_{1i}+v_i^{(1)})=\sum x_{1i}=1$ より$\sum v_i^{(1)}=0$という条件のもとで，定理 1 の (6) 式から次の系を得る．

系 2. $\boldsymbol{d}^*$をd_{ij}を要素とする$n(n-1)/2$次元ベクトルとおくと適当な$n\times n(n-1)/2$行列Fを用いて次のように表現できる．

$$\boldsymbol{v}^{(1)}=F\boldsymbol{d}^*. \tag{8}$$

このd_{ij}の係数（行列Fの成分）から重要度に影響を与える一対比較行列の成分を評価することができる．

4. おわりに

ＡＨＰ法で使われる整合度はデータの信頼性を知るために，重要度は最終的な代替案の順序づけのために，どちらも慎重に用いられなければならない．これらの整合度，重要度に各レベルでの評価行列の要素がどのように影響を与えているかを調べることは，データ構造を理解することであり，意思決定を行う上で重要である．本研究では感度分析を用いてそれらを評価する手法を提案し，数値実験で有効性を確認した．

参考文献

[1] Saaty,T.L.(1977) A scaling method for priorities in hierachical structures, Journal of Mathematical Psycology,vol.15,no.3,234-281.

[2] Saaty,T.L.(1986) Scaling the membership function, European Journal of Operational Research,vol.25,320-329.

[3] Tanaka,Y.(1994) Recent advance in sensitivity analysis in multivariate statistical methods,Journalof the Japanese Society of Computational Statistics,vol.7,no.1,1-25.

[4] 斉藤正彦 (1966) 線形代数入門, 東京大学出版会.