1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

非加法的集合関数と線形不等式

02102260　東京工業大学　*柏原 賢二　KASHIWABARA Kenji

1　はじめに

集合関数とは、集合の部分集合ごとに値をもつような関数である。ここでは、有限集合Ω上での関数

$$\varphi : 2^{\Omega} \to \mathbf{R}$$

を考察の対象とする。非加法的というのは、素である $A, B \subset \Omega$ に対して、必ずしも $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cup B)$ が成り立たないことを言っている。このような関数は、ファジー測度論 [1] などの分野で扱われている。

集合関数の全体として、

$$\Phi = \{\varphi : 2^{\Omega} \to R | \varphi(\emptyset) = 0, \varphi(\Omega) = 1\}$$

を考えると、これは、$2^{|\Omega|-2}$次元の線形空間になっているが、このうち、この研究では、凸で閉となるようなクラスのみ扱う。そのようなクラスには、代表的な集合関数である確率測度や、ファジー測度論でよく用いられるビリーフ関数、それから確率測度の下界包絡等がある。

凸で、閉であるような集合を表すのに、線形不等式を用いる。

$$\left\{\varphi \in \Phi | \sum_{G \subset \Omega} \lambda(G)\varphi(G) \geq 0\right\}$$

が閉半空間を表すが、これを表現するのには、係数だけを考えれば十分である。係数の集合を、$\Lambda = \left\{\lambda : 2^{\Omega} \to R\right\}$ とする。

係数集合の部分集合を与えると、それらを満たす集合関数が凸集合として決まることになる。集合関数の凸集合が与えられたとき、全ての頂点を含むような線形不等式の係数を集めてきたものを最大係数集合と呼ぶことにする。

2　確率測度

定義: 関数 $\varphi \in \Phi$ が確率測度とは、任意の $E \cap F = \emptyset$ となる $E, F \subset \Omega$に対し、$\varphi(E) + \varphi(F) = \varphi(E \cup F)$ を満たす非負関数のことである。

確率測度の全体は、凸多面体となり、その最大係数集合は、

$$\left\{\lambda : 2^{\Omega} \to R | \sum_{G : \omega \in G} \lambda(G) \geq 0 \text{ for all } \omega \in \Omega\right\}.$$

となる。

3　ビリーフ関数

定義: 関数 $m : 2^{\Omega} \to [0,1]$ が基本確率割当であるとは、$\sum_{G \subset \Omega} m(G) = 1$ でかつ、$m(\emptyset) = 0$ が成り立つときである。関数 $\varphi \in \Phi$ がビリーフ関数であるとは、ある基本確率割当 m が存在して、$\varphi(E) = \sum_{G \subset E} m(G)$ と書けることである。

ビリーフ関数の全体は、凸多面体となり、その最大係数集合は、

$$\left\{\lambda : 2^{\Omega} \to R | \sum_{G : E \subset G} \lambda(G) \geq 0 \text{ for all } E \subset \Omega\right\}.$$

となる。

4　下界包絡

定義: 関数 $\varphi \in \Phi$ が確率測度の下界包絡であるとは、ある確率測度からなる集合 $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ が存在して、

$$\varphi(E) = \min_{i \in I} \varphi_i(E) \quad \text{for all } E \subset \Omega.$$

となることである。

下界包絡の全体は凸多面体となり、これの係数集合は、

$$\left\{\lambda \in \Lambda \middle| \sum_{G:\omega\in G} \lambda(G) \geq 0 \text{ for all } \omega \in \Omega\right.$$

$$\left. |\{G \in 2^{\Omega} - \{\Omega, \emptyset\} : \lambda(G) > 0\}| \leq 1 \right\}$$

となることが知られている。[2]

5 定義域の拡張問題

集合関数が巾集合の一部上でのみ定義されているとき、その関数が望みの集合関数のクラスに入るかどうかを判定する条件を考える。

定理 1 $\mathcal{M} \subset 2^{\Omega}$上で定義された関数$\varphi$に対し、$2^{\Omega}$全体で定義された拡張された関数で凸であるの集合関数のクラス$\mathcal{G} \subset \Phi$に属するものが存在する必要十分条件は、$\mathcal{G}$の最大係数集合のうち、$\mathcal{M}$ 以外の値が 0 のものを $\mathcal{M}$ に制限してできる不等式を、φ が満たすことである。

この定理は、確率測度に対する定理 [3] の拡張である。

6 サンドイッチ問題

二つの集合関数が与えられた時、それにはさまれる形で、望みのクラスに属する集合関数が存在するかどうかどうかの条件を考える。

定理 2 $\mathcal{G}$を凸多面体となる集合関数のクラスとする。$\mu, \nu \in \Phi$を二つの集合関数とすると、$\nu(G) \leq \varphi(G) \leq \mu(G)$ となる$\varphi \in \mathcal{G}$が存在する必要十分条件は、$\lambda - \lambda'$が $\mathcal{G}$の最大係数集合の要素となるような任意の非負集合関数$\lambda, \lambda' \in \Lambda$に対して、

$$\sum_{G\subset\Omega} \lambda(G)\mu(G) - \sum_{G\subset\Omega} \lambda'(G)\nu(G) \geq 0$$

が成り立つときである。

これは、確率測度に対する定理 [4] の拡張である。

7 2 項関係での表現問題

定義: 2^{Ω}上の 2 項関係$\succeq$が集合関数のクラス$\mathcal{G} \subset \Phi$によって、実現可能とは、ある集合関数$\varphi \in \mathcal{G}$が存在して、任意の $E, F \subset \Omega$に対し、

$$E \succeq F \Leftrightarrow \varphi(E) \geq \varphi(F)$$

が成り立つことである。

定理 3 二項関係$\succeq$が集合関数の多面体のクラス$\mathcal{G} \subset \{\varphi \in \Phi | \varphi(G) \geq 0 \text{ for all } G \subset \Omega\}$ で実現可能であるための必要十分条件は、

(a) $\Omega \succ \emptyset$,

(b) $G \succeq \emptyset$ が任意の $G \subset \Omega$で成り立つ。

(c) $E \succeq F$ または $F \succeq E$ が任意の $E, F \subset \Omega$ で成り立つ。

(d) $\sum_{i<n} k_i \lambda_{E_i,F_i}(G) + k\lambda(G) = 0$ が任意の $G \in 2^{\Omega} - \{\emptyset\}$ で成り立つとき、$E_0 \preceq F_0$が成り立つ。

但し、$k_0, \ldots, k_{n-1}$は正の実数列で、また、$E_i, F_i \in 2^{\Omega} - \{\emptyset\}$ は $E_i \succeq F_i$を満たすものとし、λは $\mathcal{G}$の最大係数集合の要素とする。

これは、確率測度に関する定理 [5] のの拡張になっている。

参考文献

[1] 菅野道夫、室伏俊明,「ファジィ測度」 日刊工業, 1992.

[2] R. Giles, Foundations for a theory of possibility, in "Fuzzy information and decision processes." 183-196 (M.M Gupta and E. Sanchez, eds.) Amsterdam: North-Holland, 1982.

[3] K.P.S.Bhaskara Rao and M.Bhaskara Rao, "Theory of Charges" Academic Press, London/New York, 1983.

[4] J.Kindler, Sandwich Theorems for Set Functions, J. Math. Anal. Appl. **133** (1988) 529-542.

[5] D.Scott, Measurement Structures and Linear Inequalities, Journal of mathematical psychology **1** (1964), 233-247.