1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

機械故障をともなう生産システムにおけるロットサイズの決定法 I

土肥正，山田康哲，海生直人†，尾崎俊治
広島大学工学部，広島修道大学商学部†

1 はじめに

生産/在庫管理問題を定式化する際，生産機械の故障およびそれに対する保守管理が全体のオペレーションに如何に影響を及ぼすかについて定性的に評価することは極めて重要である．事実，FMS 等の大規模システムにおいて，生産機械のブレイクダウンが生じた場合，システム全体の稼働性は大幅に低減するものと考えられ，そのような不測の事態を想定した管理体制を実現することは必要不可欠である．

Groenevelt, Pintelon and Seidmann [1] は，通常の経済的生産ロットサイズ (EMQ もしくは EPQ) モデルにおいて生産機械が故障する現象に着目し，故障時間分布として指数分布を仮定することによって新しいタイプのロットサイズモデル NR-G (a modified EMQ model with general machine breakdowns and no resumption) を解析した．NR-G と故障を伴わない通常の EMQ モデルの相違点は以下の通りである．

(1) 平均事後保全費用はロットサイズとは独立である．

(2) NR-G における最適ロットサイズとその最小期待費用は故障率の増加関数となる．

(3) 故障率が 0 に近づくにつれて，NR-G における最適ロットサイズと期待費用は EMQ におけるそれに漸近収束する．

(4) NR-G における最適ロットサイズは EMQ におけるロットサイズよりも常に大きい．

Ibrahim and Kee [2] もまた異なるロットサイズモデルについて評価を行っている．

しかしながら文献 [1, 2] のモデルでは，各ロットがたちあがる直前に事後保全は必ず終了するという仮定を前提にしていることに注意すべきである．そこで本稿では，前述の NR-G を故障時間が一般の確率分布に従う場合に拡張し，さらに機械修理に要する修理時間が確率的に変動する一般的なモデルについて考察する．

2 モデル

文献 [1] で議論されたものと同様な EMQ モデルを考える．製品需要は時間に正比例し，単位時間当りの需要率は d (units/time) とする．また，単位時間当たりの製品の生産率は p (units/time) であり，一般性を失うことなく $0 < d < p$ を仮定する．一回のロットで生産する生産数量 (ロットサイズ) は Q である．時刻 $t = 0$ において生産が開始されたとすると，時刻 $t = Q/p$ において生産が終了し，次に生産ロットをたちあげるのは，前期のロットにおいて生産された製品がすべて消費されるときである．すなわち，在庫品数量が 0 になる時間間隔を 1 サイクルとして定義する．

生産期間 $t \in [0, Q/p]$ 中に生産機械が故障したならば，ただちに修理が開始される．もし 1 サイクル中に修理が完了されなければ，機械損失費用を被るものとする．事後保全に必要な単位時間当たりの修理費用を M (dollars/time)，機械損失費用を k (dollars/product)，在庫維持費用 h (dollars/time/unit)，生産固定費用を S (dollars/lot) とする．故障時間の確率分布関数と故障率をそれぞれ $F(t)$, $r(t)$ とし，修理時間の確率分布関数と平均修理時間を $G(t)$, $1/\mu$ とする．

ここでは，故障時間が一般分布に従う場合に，定常状態における単位時間当たりの期待費用 (定常期待費用率) を最小にする最適生産ロットサイズが唯一存在するための必要かつ十分条件を求める．いま，非現実的な意志決定を回避するために，生産ロットサイズの上·下限値を以下のように定義する．

$$\underline{Q} \le Q \le \overline{Q}. \tag{1}$$

また，定常期待費用率は，再生理論から

$$C(Q) = \lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{E}[\text{total cost on } (0,t]]}{t} = \frac{S(Q)}{P(Q)} \tag{2}$$

となる．ここで，$S(Q)$ と $P(Q)$ はそれぞれ 1 サイクル当りの総期待費用と 1 サイクルの平均時間であり，以下のように求めることができる．

$$\begin{aligned} P(Q) &= \int_0^{Q/p}\int_0^{(p-d)t/d} \frac{p}{d} t dG(s) dF(t) \\ &+ \int_0^{Q/p}\int_{(p-d)t/d}^{\infty} (t+s) dG(s) dF(t) \\ &+ \int_{Q/p}^{\infty} \frac{Q}{d} dF(t), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} S(Q) &= S + \int_0^{Q/p}\int_0^{\infty} M s dF(t) \\ &+ \int_0^{Q/p} \frac{h(p-d)pt^2}{2d} dF(t) \\ &+ \int_0^{Q/p}\int_{(p-d)t/d}^{\infty} kd\left(s - \frac{p-d}{d}t\right) dG(s) dF(t) \end{aligned}$$

$$+ \int_{Q/p}^{\infty} \frac{h(p-d)}{2pd} Q^2 dF(t). \tag{4}$$

いま，次のようなスイッチング関数 $q(\cdot)$ および $t_0 = Q/p$ を定義する．

$$q(t_0) = \left(\frac{S'(t_0)}{\overline{F}(t_0)}\right) P(t_0) - \left(\frac{P'(t_0)}{\overline{F}(t_0)}\right) S(t_0). \tag{5}$$

ここでプライムは微分記号を表し，$\overline{\phi}(\cdot)$ は一般に関数$\phi(\cdot)$の余関数を示す．

そのとき，$\underline{Q} \le Q \le \overline{Q}$ に対して次の定理を得る．

定理: $F(t)$ は IFR (increasing failure rate) であり，すべての $\underline{Q} \le Q \le \overline{Q}$ に対し $kd < C(Q) < M + kd$ が成立するものと仮定する．

(i) $q(\underline{Q}/p) < 0$ かつ $q(\overline{Q}/p) > 0$ ならば，$q(Q^*/p) = 0$ を満たす有限で唯一の最適ロットサイズ $Q^*(\underline{Q} < Q^* < \overline{Q})$ が存在し，そのときの定常期待費用率は

$$C(Q^*) = \frac{S_c(Q^*)}{P_c(Q^*)} \tag{6}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} S_c(Q) &= r(\frac{Q}{p})\frac{M+kd}{\mu} \\ &- kdr(\frac{Q}{p})\int_0^{\frac{(p-d)Q}{pd}} \overline{G}(s)ds \\ &+ \frac{h(p-d)}{d}Q, \end{aligned} \tag{7}$$

$$P_c(Q) = r(\frac{Q}{p})\left\{\frac{1}{\mu} - \int_0^{\frac{(p-d)Q}{pd}} \overline{G}(s)ds\right\} + \frac{p}{d}\tag{8}$$

である．

(ii) $q(\underline{Q}/p) \ge 0$ ならば，最適ロットサイズは $Q^* = \underline{Q}$ となる．

(iii) $q(\overline{Q}/p) \le 0$ ならば，最適ロットサイズは $Q^* = \overline{Q}$ となる．

またこのとき，以下のような性質を得る．

性質: $\tilde{Q} = \sqrt{2pdS/h(p-d)}$ を通常の EMQ モデルにおける最適ロットサイズとする．定理の (i) の条件の下で，もし $q(\tilde{Q}/p) < 0$ ならば，最適ロットサイズ Q^* は $\tilde{Q}$より常に大きい．

上述の定理の仮定において，費用 kd は単位修理時間当たりの機会損失費用であり，$M+kd$ は品切れ時に生じる単位時間当たりの費用を表している．特に，故障時間が指数分布に従い，修理時間が一定 $(= l)$ ならば，仮定 $kd < C(Q) < M + kd$ は全ての $Q \in [\underline{Q}, \overline{Q}]$ で満足され，式 (6) は

$$C(Q^*) = \frac{Mdl}{p} r(\frac{Q^*}{p}) + h(p-d)\frac{Q^*}{p} \tag{9}$$

となる．

3 数値例と考察

故障時間分布および修理時間分布としてパラメータ λ および μ の指数分布を仮定する．費用関数における各パラメータは $d = 30$, $p = 150$, $h = 0.5$, $S = 500$, $M = 1000$, $k = 1.25$, $\lambda = 1.0$ と設定した．この場合の最適ロットサイズと期待費用の関係を表 1 に示す．μ の値が減少するにつれて最適ロットサイズは減少することがわかる．これより，修理時間が比較的大きい場合には目標ロットサイズを小さめに設定すべきであることがわかる．修理時間が増加すると事後保全費用が増加することは明らかであるので，総費用の増加を軽減させるために，在庫維持費用を減少させている，つまり目標ロットサイズを小さくしているものと考えられる．

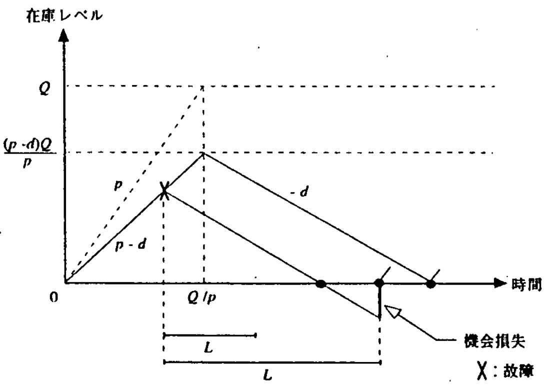

図 1 モデル の概念図.

表 1 最適ロットサイズと定常期待費用率の関係.

μ	Q^*	$C(Q^*)$
0.1	96.4283	823.307
0.2	117.681	695.693
0.3	146.096	607.102
0.4	186.031	539.881
0.5	235.838	486.595
0.6	280.641	444.070
0.7	311.915	410.165
0.8	332.412	382.893
0.9	346.084	360.638
1.0	355.520	342.203

参考文献

[1] H. Groenevelt, L. Pintelon and A. Seidmann, "Production Lot Sizing with Machine Breakdowns", *Management Science*, Vol. 38, pp. 104-123, (1992).

[2] R. N. Ibrahim and P. K. Kee, "Determination of Economical Lot Size for MRP/JIT Manufacturing", *Proceedings of 1994 Pacific Conference on Manufacturing*, pp. 684-693 (1994).