1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

リコールの可否が制御できる最適停止問題

02202090　筑波大学　齋藤毅　SAITO Tsuyoshi

1. はじめに

本研究では、各時点に現れるオファーの将来におけるリコールの可否が、ある金額を払うことによって制御できるという最適停止問題について考える。以下、中古車購入問題を例に問題状況を説明しよう。

ある人が今年中に車を一台入手しなければならないとする。彼は毎日、中古車センターを回っているが、バスを利用しているため毎日 s 円だけ費用がかかる。出会える自動車の価値は最低で a、最高で b である。しかし、実際の価値はセンターに着くまでは分からず、事前にはその価値が分布 F に従うことしか分かっていない。また、見つけた自動車に対して手付金 d 円を払えば予約することができるものとする。

なお、買う自動車は一台だけであるから、どの時点においても、予約した自動車のうちで最大価値のものだけを記憶していればよい。また、新たに自動車を予約する場合や購入する場合、その自動車の価値はそれまでの予約済自動車の価値の最大値を上回っていなければならないことは言うまでもない。

さて、あるセンターで手ごろな自動車を見つけ、その吟味を終えた後、彼はそこで一つの決定を下さねばならない。それは次の四つのどれかである。 1. その自動車を買ってセンター回りを止める (AS)。 2. その自動車に手付金を払って予約しておくがセンター回りは続ける (RC)。3. その自動車には手付金を払わずパスしてセンター回りを止める、すなわち予約済みの自動車を買う (PS)。 4. その自動車には手付金を払わずパスしてセンター回りを続ける (PC)。(ここで各記号は次の意味である。Accept、Reserve、Stop、Continue。) このとき、どの決定が期待利益を最大化する合理的決定となるか。これが本問題の基本的な課題である。

ただし、予約しなかった自動車のリコールは許されず、また、予約したが別の自動車を買ったという場合、手付金は返ってこないものとする。

以下、次の仮定を設けておく。

$$0 < d < -a - s + \beta\mu \tag{1}$$

ここでβは割引率、μは分布の平均値である。

2. 基本方程式

まず、$u_t(y,w)$、$v_t(y)$ を次のように定義する。

$u_t(y,w)$ ：時点 t で最大予約済価値が y、かつ価値 w の自動車に出会っている状況で、それ以後最適政策をとったときの総期待利益。

$$v_t(y) = \int_a^b u_t(y,\xi)dF(\xi)$$

このとき、$u_t(y,w)$ は次の式を満たす。ただし時点は最終時点を 0 として、後ろ向きにとっている。

$$u_t(y,w) = \max\begin{cases} AS : w \\ RC : -d - s + \beta v_{t-1}(w) \\ PS : y \\ PC : -s + \beta v_{t-1}(y) \end{cases} \tag{2}$$

$$u_0(y,w) = \max\{A : w, P : y\} \tag{3}$$

ここで次の関数 $z_t(w)$、$z_t^0(y)$ を導入すると (2) 式は (6) 式のようになる。

$$z_t(w) = \max\{w, -d - s + \beta v_{t-1}(w)\} \tag{4}$$

$$z_t^0(y) = \max\{y, -s + \beta v_{t-1}(y)\} \tag{5}$$

$$u_t(y,w) = \max\{z_t(w), z_t^0(y)\} \tag{6}$$

3. 最適政策

$\hat{x}_t$ ：$z_t(w)$ の { } 内の二者を等しくする w。現在の自動車についての SC分岐点。

$\hat{x}_t^0$ ：$z_t^0(y)$ の { } 内の二者を等しくする y。最大予約済価値についての SC分岐点。

$\hat{w}_t(y)$ ：$\hat{w}_t(y) = \max\{w | z_t(w) = z_t^0(y)\}$
現在の自動車の RP分岐点（最大予約済価値が y のとき）。

とする。これらはすべての $t \geq 1$ に対して、区間 (a,b) に一意に存在することが証明できる。

時点 t で最大予約済価値が y のときに見つけた価値 wの自動車に対する決定ルールは次のようになる。(図 1)

最適予約ルール

$w > \hat{w}_t(y)$ なら w を予約、さもなくばパスせよ。

最適停止ルール

1. 予約をする場合

$w > \hat{x}_t$ なら探索を停止、さもなくば続行せよ。

2. パスをする場合

$y > \hat{x}_t^0$ なら探索を停止、さもなくば続行せよ。

この問題では $\hat{w}_t(y)$、$\hat{x}_t$、$\hat{x}_t^0$ が決定ルールにおいて重要ポイントとなる。

4. 結論

1. $\hat{x}_t$ は t に関して厳密に増加である。
2. $\hat{x}_t^0$ は t に関して定数であり、それは

$$\beta \int_a^b \max\{x, \xi\} dF(\xi) - x - s = 0 \quad (7)$$

の解 h^* である。

3. $\hat{w}_t(y)$ は y に関して厳密な増加関数であり、常に $\hat{w}_t(y) \geq y$ となる。
4. $\hat{w}_t(y)$ は t に関して非減少である。

5. 手付金と予約領域

これまで手付金 d は仮定 (1) を満たす定数としてきたが、$\hat{x}_t$ は d に関して厳密に減少、$\hat{w}_t(y)$ は d に関して非減少であるため、d の値によっては予約領域 (RC) の存在しないケースがある。(図 2)

ちなみに仮定 (1) を $d \geq 0$ に緩めると次のことが言える。

この最適停止問題は $d = 0$ とすると従来の「リコールありの最適停止問題」に、$d \to \infty$ では従来の「リコールなしの最適停止問題」に帰着される。[1]

また、「リコールが不確実な最適停止問題」[2] との結合問題も課題として残される。

参考文献

[1] Sakaguchi, M. : Dynamic Programming of Some Sequential Sampling Desigh, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2, 446-466(1961)

[2] Ikuta, S. : Optimal Stopping Problem with Uncertain Recall: *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 31, 2, June, 145-170(1988)

[3] Kohn, M.G., and Shavell, S. : The Theory of Search, *Journal of Economic Theory*, 9, 93-123(1974)

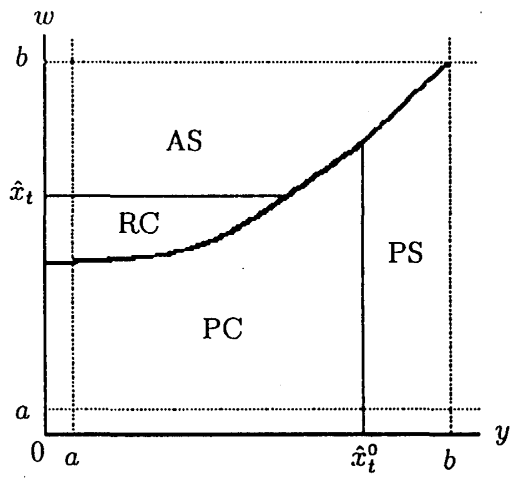

図 1: RC のある場合

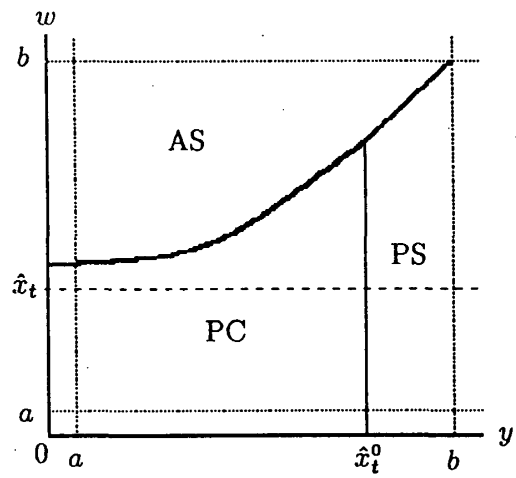

図 2: RC のない場合