1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ヴォラティリティ変動下でのOTC株式オプションのヘッジ手法について

日興證券(株)投資工学研究所　　飯塚仁嗣 IIDUKA Hitotsugu

1 はじめに

海外の店頭市場(OTC)では上場物と比較して満期が長い株式オプションの取引がなされており、長期間のリスクコントロールを行う証券として海外の金融機関等に利用されている。本発表では店頭(OTC)オプションを想定した長期オプションのヘッジ手法を株価の瞬間的標準偏差（ヴォラティリティ）が確率変動する場合のモデル（Heston[2]）を用いて検討した結果を紹介する。

2 確率ヴォラティリティ・モデル

Black and Scholes[1] のオプション価格評価モデルの条件緩和に対する一つのアプローチとして、株価のヴォラティリティの変動性を考慮した拡張モデルがHeston [2] によって提案されている。このモデルでは、株価$S(t)$及び株価の分散（ヴォラティリティの二乗）$v(t)$が以下の確率プロセスに従うと仮定する。

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dZ_1 \qquad (1)$$

$$dv(t) = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma\sqrt{v(t)}dZ_2 \qquad (2)$$

ここで、κは平均回帰の強さ、θは長期的な平均、$Z_j(t)(j=1,2)$はWienerプロセス（ただし、$dZ_1(t)dZ_2(t) = \rho dt$ を仮定）、σは分散のヴォラティリティをそれぞれ表している。$S(t)$、$v(t)$と時間tの関数であるオプション価格は、t時点での株価をS、分散をvとおくと、

$$C(S,v,t,T;K) = SP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2 \qquad (3)$$

で与えられる。ここで、Kは行使価格、Tは残存期間、rは安全利子率を示し、また、

$$P_j(S,v,t,T;K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\{\frac{e^{-i\phi\log K}f_j(S,v,t;\phi)}{i\phi}\}d\phi \qquad (4)$$
$$,(j=1,2)$$

である。$P_j(j=1,2)$はオプションがイン・ザ・マネーで行使される場合の条件付き分布関数：

$$P_j(S,v,t,T;K) = \Pr[S(T) \geq K | S(t) = S, v(t) = v]$$

を表わしている。さらに$f_j(j=1,2)$は、分布関数P_j $(j=1,2)$に関する特性関数を示している。

3 オプションのポジション・ヘッジ

ヴォラティリティを一定と仮定するBlack and Scholesの評価式では、原資産とオプションを使って微小時間の無リスク・ポートフォリオを構成することが可能である。これに対し、ヴォラティリティーが確率的に変動する場合においては、オプションが２つのWienerプロセス、$Z_1(t)$、$Z_2(t)$に依存しているため、オプションと株式とで同時に２つの確率変動部分を消去することは不可能となる。ヴォラティリティー変動下で、微小時間の無リスク・ポートフォリオを構成するためには、オプションと株式に加え分散$v(t)$に依存する資産を組み入れる必要がある。これには、一つのオプションを新たに組み入れることによって達成可能である。

ここで２つのオプションと株式とで構成されるポートフォリオについて考える。なお、後にヘッジ手法の検討を行なうことを考慮して、ポートフォリオに組み入れるオプションは取引を行わないものと行なうものとを明示的に区別する。また、組み入れるオプションは全て同じ株式上に書かれたものとし、さらにオプション間の相違は行使価格あるいは残存期間のみとする。

t時点でのポートフォリオの価値を$P(t)$とおくと、Δtでのポートフォリオの微小変化ΔPは以下のように表される[3]。

$$\Delta P = w(t)\Delta C + w^\circ(t)\Delta C^\circ + h(t)\Delta S - P(t)(e^{r\Delta t} - 1) \qquad (5)$$

ここで、

$w(t)$：取引を行なわないオプションの保有量
$w^\circ(t)$：取引オプションの保有量
$C(t)$：取引を行なわないオプションの価格
$C^\circ(t)$：取引オプションの価格

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$h(t)$：株式の保有量
$S(t)$：株価
r：安全利子率（一定）
である。

ΔPを状態変数と時間の微小変化に関して展開すると

$$\begin{aligned}\Delta P \quad &= [\frac{\partial C_T}{\partial S} + h(t)]\Delta S + \frac{\partial C_T}{\partial v}\Delta v \\ &+[\frac{\partial C_T}{\partial t} - P(t)r]\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_T}{\partial S^2}(\Delta S)^2 \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_T}{\partial v^2}(\Delta v)^2 + \frac{1}{2}[\frac{\partial^2 C_T}{\partial t^2} - P(t)r^2](\Delta t)^2 \\ &+\frac{\partial^2 C_T}{\partial S \partial v}\Delta S \Delta v + \frac{\partial^2 C_T}{\partial S \partial t}\Delta S \Delta t \\ &+\frac{\partial^2 C_T}{\partial v \partial t}\Delta v \Delta t + \cdots \qquad (6)\end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$C_T = w(t)C + w^*(t)C^* \qquad (7)$$

である。

ΔPの分散を最小にするオプションのヘッジ手法は、(6)式の主要な項を0と等しくおくことによって得られる。

ポートフォリオに取引オプションを含まないヘッジ（デルタ・ヘッジ）は、(6)式の第1項を0とおくことによって

$$w(t)\frac{\partial C_T}{\partial S} + h(t) = 0 \qquad (8)$$

となり、これより株式の保有量$h(t)$が求められる。

また、ポートフォリオのデルタとガンマを組み合せたヘッジ（デルタ＋ガンマ・ヘッジ）は、

$$\begin{aligned} w(t)\frac{\partial C_T}{\partial S} + w^*(t)\frac{\partial C_T^*}{\partial S} + h(t) &= 0 \\ w(t)\frac{\partial^2 C_T}{\partial S^2} + w^*(t)\frac{\partial^2 C_T^*}{\partial S^2} &= 0 \qquad (9)\end{aligned}$$

より、$h(t)$、$w^*(t)$が求められる。

さらにポートフォリオのデルタとベガを組み合せたヘッジ（デルタ＋ベガ・ヘッジ）は、

$$\begin{aligned} w(t)\frac{\partial C_T}{\partial S} + w^*(t)\frac{\partial C_T^*}{\partial S} + h(t) &= 0 \\ w(t)\frac{\partial C_T}{\partial v} + w^*(t)\frac{\partial C_T^*}{\partial v} &= 0 \qquad (10)\end{aligned}$$

より、$h(t)$、$w^*(t)$が求められる。

4 ヘッジ手法の検討

ヘッジ手法の検討は、3.の手法を対象にモンテカルロ・シミュレーション並びに実データを用いたシミュレーションを用いて行う。シミュレーションにおける株式と分散のパラメターは、日経平均オプションデータ（上場データ及び海外における業者間取引価格データ）から計算された結果を用いる。なお、ここでのシミュレーションは取引コストを無視した市場に摩擦がない場合を想定している。またヘッジのリバランス間隔は一定かつ所与として扱い、リバランス時には各資産の組み入れ割合のみを上記ヘッジ手法により求めることにする。各手法のパフォーマンスは、ヘッジを行なった時の最終的な損益の振れを標準偏差で計測し、この標準偏差を確率ヴォラティリティー・モデルによる理論価格で除した値で評価する（Hull[4]参照）。

様々な条件の下でシミュレーションを行った結果、オプション・ガンマを組み合せたヘッジ手法が相対的に有効であることが示唆された。

参考文献

[1] Black, F. and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81(1973), 637-654.

[2] Heston, S. L., "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies*, Vol.6 ,No.2(1993), 327-343.

[3] Hull, J. and A. White, "Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options," *Journal of International Money and Finance*, 6(1987),131-152.

[4] Hull, J. Options, Futures,and Other Derivative Securities, Prentice-Hall(1989).

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.