1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

プリペイメント・モデルの現状
———非合理性のモデル化———

青沼 君明*

1 プリペイメント・リスクとは

プリペイメント・リスクとは期限前解約のリスクであり、モーゲージ証券を中心に研究がなされてきた。モーゲージ証券では、住宅ローンを借りた個人が、新規ローンの手数料と保険料を負担することで、これまでのローンを一方的にいつでも繰り上げ返済することが可能であるというアメリカン・オプションが含まれている。従って、高金利時代に住宅ローンを借り入れた個人は、金利が低下すればより低金利でローンを借り変えることが可能である。

2 実務上のプリペイメント・リスクと問題意識

モーゲージ証券に類するものは日本国内では取引きされていない。しかし、実務上では定期預金などにおいて預金者による解約がしばしば問題となり、これもプリペイメント・リスクの一種として捉えられる。

低金利時代に固定金利の預金によって資産を運用した個人は、金利が上昇した場合には保有している預金を解約してより高金利のもので再運用すると想定される。また、高金利時代に資金運用した個人は、低金利時代にはそのまま預金を保有した方が有利となる。ところが、個人投資家（預金者）は合理的な行動をとらない場合がしばしばある。これは、個人投資家の情報量が機関投資家等と比較すると相対的に不足していることの他に、資産運用のための資金と生活資金との垣根が少ないため、例えば結婚資金や住宅購入資金等を目的として、解約が不利な条件であっても期限前解約を実行するケース。また、学費や旅行費用のために、一定期間後に確実に支出が見込まれる資金の流動性を保つ必要性等が、その発生原因として考えられる。住宅購入について考えてみても、金利低下局面では住宅の購入意欲が高まり、その頭金を確保するための期限前解約が高まると想定されるが、この現象は合理的な投資の概念とは明らかに逆行するものである。

また、資産運用に積極的（合理的）で資金に余裕のある個人投資家は、期間前解約する金利水準の最初の到達時点で実行しているはずである。したがって2回目以後の到達時点では、損失を生ずるにも関らず期間前解約しない個人投資家がウエイト的には多くなる。

最近、郵便局の定額貯金と同じような解約権付き定期預金が各銀行で募集されている。預金者が保有する解約権のプレミアム相当分だけ銀行としては金利を低くすることになるが、自由競争下での価格優位性を保ためには、個人投資家の期間前解約しない可能性を合理的に見積もることが不可欠となる。

こうした個人投資家の預金の期限前解約率は、その時点での金利水準のみならず、それまでの経路や残存時間等を含んだ複雑な関数となっていると想定されるが、実務上で有効なモデルについてはいまだ開発途上という段

*三菱銀行・商品開発部。筑波大学・経営システム科学科

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

階にある。ここでは、こうした実務への応用が期待される、プリペイメント・リスクのモデルについて、現状と概要を報告する。

3　プリペイメント・リスク・モデルの概要

プリペイメントに関する最も単純なモデルは、期限前解約の解約率は金利水準の変動によってのみ変化するというものである。図1の例では、金利が現状の水準より上昇した場合には解約率の割合が増大し、反対に金利が下がると解約率も低下するという線形関数になっている[1]。

図1

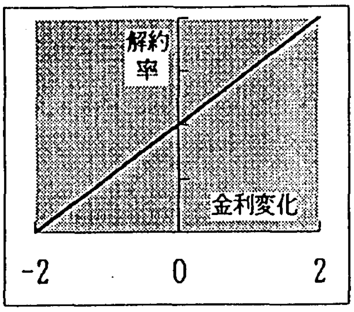
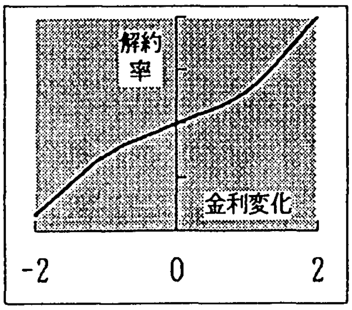


図2



実務的には、ヒストリカルデータを利用して図2に示すような指数や区分線形などの非線形関数を推定するケースが多いが、各社によって様々なモデルが開発されており、満期までの期間、金利のボラティリティ、季節性などが取り込まれている。

さらに、オプション価格評価理論を用いて多くのプリペイメント・モデルが提案されてきたが、純粋なオプション価格モデルではプリペイメントの現状を説明することが難しく、解析的アプローチを加える必要があるという意見も多い。

J.J.MaConnell & M.Singh[2][3]の最近の論文では、CMO(Collateralized Mortgage Obligation)[2]の評価モデルが構築されている。$\phi(t)$と$\alpha(t)$をドリフト・パラメーターとするとき、金利の確率プロセスを以下のように表わす。

$$
\begin{aligned}
dr &= [\phi(t) - \alpha(t)r]dt + \sigma(t)\sqrt{r}dz, \quad (1)\\
&\phi(t) = a(t)b + \theta(t)\\
&\alpha(t) = a(t) + \varphi(t)\sigma(t)
\end{aligned}
$$

この時、CMOの価値は、次の式で求められる。

$$
\begin{aligned}
&1/2r\sigma(t)^2V^i_{rr} + (\phi(t) - \alpha(t)r)V^i_r + V^i_t\\
&\qquad +A^i - rV^i = 0, \quad (2)\\
&1/2r\sigma(t)^2M^i_{rr} + (\phi(t) - \alpha(t)r)M^i_r + M^i_t\\
&\qquad +(A^i - c_sF^i(t)) - rM^i = 0. \quad (3)
\end{aligned}
$$

尚、$V^i(r,t)$は抵当権設定者によって支払われるキャッシュフローの価値、$M^i(r,t)$はモーゲージ証券によって支払われるキャッシュフローの価値であり、c_sは手数料と保険料である。このモデルの中では、ある水準を越えて金利が低下した場合の時間Δtのプリペイメントの確率は、

$$
Pr(t) = 1 - e^{-(\lambda(t)+\rho)\Delta t} \quad (4)
$$

で求められている。この式における$\lambda(t)$は時間に依存するプリペイメントのハザード・レート、ρは乗り換えの遅延パラメーターを表わしている。

[1]ここでは解約権付き定期預金の例で関数を表わしているが、モーゲージ証券の場合には傾きが逆となり、金利が下がるほど解約率は増大する

[2]モーゲージ証券の一種で、満期および利子支払い方法が異なる複数のトラッシュに分けて発行される。

参考文献

[1] Dunn, K.B. and J.J.MaConnel(1981), "Valuation of GNMA mortgage-backed securities," *Journal of Finance*, Vol.36, pp. 375-392.

[2] McConnell, J.J. and M. K. Singh(1993), "Valuation and analysis of collateralized mortgage obligations," *Management Science*, Vol.39, pp. 692-709.

[3] McConnell, J.J. and M. K. Singh(1994), "Rational Prepayments and the Valuation of Collateralized Mortgage Obligations," *The Journal of Finance*, Vol. XLIX, No.3, pp. 891-921.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.