1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

線形計画問題に対する主双対内点法と、その相補性問題へ拡張
1992年度 Lanchester 賞受賞の対象論文を中心として

筑波大学 ＊吉瀬 章子
東京工業大学 小島政和
IBM Almaden 研究所 Nimrod Megiddo
統計数理研究所 水野眞治
防衛庁 野間俊人

1. はじめに

Lanchester 賞は1954年に米国 OR 学会が設立した表彰部門である。賞の趣旨によれば、各年においてオペレーションズ・リサーチに最も貢献した英文論文に送ると定められている。本稿の著者5名は、1992年度の Lanchester 賞の表彰委員会（Clyde L. Monma（委員長）、John Bartholdi、Robert Cooper、Edward Kaplan、Michael Todd、David Yao の各氏）より、この賞を授与された。受賞対象は、これら5名によって書かれた11本の論文群 [13, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 10, 11, 12] であり、この稿では、これらの論文の概略と、それらが果たした役割について述べる。

2. 各論文の概要

1994年に Karmarkar[3] が提案した線形計画問題に対する解法は主に以下の3点において多くの注目を集めた。

(i) 線形計画問題が与える実行可能領域の内部（正確には、すべての不等式制約を等号ではなく強く満たしている領域）に点列を生成する。

(ii) シンプレックス法に対してはこれまで示すことができなかった、多項式時間で解を求める解法である。

(iii) Karmarkar 自身が行なった計算機実験では超大規模な問題でも短時間で解けるという結果を得ている。

Karmarkar のアルゴリズムは、特殊な構造を持つ問題を対象とし、特殊な射影変換を必要とするため、当初はこの特殊性により (ii) と (iii) が得られるのではないかとも考えられていた。一方、[2]、[1]、[16] などの論文では、Newton 法や、あるいは障壁関数法といった、数理計画の分野で良く知られた方法を用いて (i) の性質を満たす解法を提案し、Karkarkar 法との関連性を指摘している。このような既存の手法を用いても (ii) の性質を持つ解法が構築できることを導くための1つの基盤となったのは、障壁関数と強いつながりを持つ、センターパスと呼ばれるパスに関する研究であった。[13] では線形計画問題の主問題、双対問題それぞれに存在するセンターパスに関する性質を示し、さらにより一般的な線形相補性問題に対しても解析を行なっている。そしてこれらの研究の蓄積から、Newton 法を用いた初の多項式時間の解法が Renegar[15] によって提案された。

[15] 以降、いくつかの新しい多項式時間の内点法が提案されたが、それらは主問題、双対問題の一方の実行可能領域に点列を生成するアルゴリズムであった。[4] では、[13] で与えられた主双対内点法の枠組を用いて、両者の実行可能領域に点列を生成する解法（主双対内点法）を初めて提案し、さらに (ii) の性質を持つことを示した。

[5] は、[4] によって構築された主双対内点法の枠組を半正定値行列を伴う線形相補性問題に拡張した論文である。2次凸計画問題を含む広い問題群に内点法を適用可能にしたことに加え、計算複雑度もさらに改良され現在最も良いとされている $O(\sqrt{n}L)$（n は変数の数、L は問題のサイズを表す）の反復で解が得られることが示されている。

[4], [5] のアルゴリズムは共にパス追跡法と呼ばれる解法の1つであり、一般にステップ幅を大きくとることが難しい解法である。一方、内点法に関する計算実験の経験からは、実用上の高速性はステップ幅を大きくとることと相関がある。理論的な性質を損なわずに、なるべく大きなステップ幅を選択できるアルゴリズムを提案することには意義がある。この課題に対する1つの考え方は、Karmarkar 法のようにポテンシャル関数を利用して、点列を生成させる許容領域を広くすることである。[6] では $O(\sqrt{n}L)$ の反復回数内で解を得る性質を持つ線形相補性問題に対するポテンシャル関数減少法が初めて提案されている。

パス追跡法とポテンシャル関数減少法は一見全く異なる解法に見えるが、解析の手法には多くの共通点がある。[7] では、線形相補性問題に対象を絞り、この2つの解法を包括する統一的なアプローチを提案し、一貫した解析を行なっている。

しかし主双対内点法の理論を実際に応用したコードでは、パス追跡法、ポテンシャル関数法のどちらでもな

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

い、より単純かつ大きなステップ幅を用いた解法が用いられている。[8] と [9] は、これらの解法に理論的な解析を行なっている。また、[14] では主双対内点法の途上で生成される近似最適解から最適基底を算出する有効な方法が提案されている。

以上は線形性を持つ問題を対象とした論文であるが、主双対内点法を非線形の場合に対して一般化した研究も行なわれている。[10] は [13] の結果をある種の非線形相補性問題に拡張したものであり、[11] は [10] で扱われた問題のクラスをより大きく拡張した論文である。[12] では単調相補性問題に対して主双対内点法を応用したパス追跡法が提案され、その大局的、漸近的収束性についても議論されている。

3. おわりに

この稿、及び発表へのお誘いを頂いた、1995 年度 OR 学会秋季発表会実行委員長 刀根薫先生、ならびに関係者の皆様に謝意を表します。

References

[1] P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, J. A. Tomlin and M. H. Wright, *On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projected method*, Mathematical Programming, 36(1986), pp. 183-209.

[2] M. Iri and H. Imai, *A multipricative penalty function for linear programming – another "new and fast" algorithm*, in: Proceedings of the 6th Mathematical Programming Symposium of Japan, Tokyo, Japan, 1985, pp. 97–120.

[3] N. K. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Conbinatorica, 4(1984), pp. 373–395.

[4] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise, *A primal-dual interior point algorithm for linear programming*, in: Progress in Mathematical Programming – Interior Point and Related Methods, N. Megiddo, ed., Springer Verlag, New York, 1989, pp. 29–47.

[5] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise, *A polynomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems*, Mathematical Programming, 44 (1989), pp. 1–26.

[6] M. Kojima, S. Mizuno, and A. Yoshise, *An $O(\sqrt{n}L)$ iteration potential reduction algorithm for linear complementarity problems*, Mathematical Programming, 50 (1991), pp. 331–342.

[7] M. Kojima, N. Megiddo, T. Noma, and A. Yoshise, *A unified approach to interior point algorithms for linear complementarity problems*, vol. 538 of Lecture Notes in Computer Science, Springer Verlag, Berlin, Germany, 1991.

[8] M. Kojima, N. Megiddo, and S. Mizuno, *Theoretical convergence of large-step primal-dual interior point algorithms for linear programming*, To appear in Mathematical Programming.

[9] M. Kojima, N. Megiddo, and S. Mizuno, *A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear programming*, To appear in Mathematical Programming.

[10] M. Kojima, S. Mizuno, and T. Noma, *A new continuation method for complementarity problems with uniform P-functions*, Mathematical Programming, 43 (1989), pp. 107–113.

[11] M. Kojima, N. Megiddo, and T. Noma, *Homotopy continuation methods for nonlinear complementarity problems*, Mathematics of Operations Research, 16 (1991), pp. 754–774.

[12] M. Kojima, N. Megiddo, and S. Mizuno, *A general framework of continuation methods for complementarity problems*, To appear in Mathematics of Operations Research.

[13] N. Megiddo, *Pathways to the optimal set in linear programming*, in: Progress in Mathematical Programming – Interior Point and Related Methods, N. Megiddo, ed., Springer Verlag, New York, 1989, pp. 131–158.

[14] N. Megiddo, *On finding primal- and dual-optimal bases*, ORSA Journal on Computing, 3 (1991), pp. 63–65.

[15] J. Renegar, *A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming*, Mathematical Programming, 40(1988), pp. 59–93.

[16] G. Sonnevend, *New algorithms for solving a set of linear (convex) inequalities and its applications for identification and optimization*, in: Proceedings of the 5th IFAC–IFORS Conference held in Budapest, Hungaria, B. Martos, ed., Pergamon Press, Oxford, UK. 1987.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.