ロバスト巡回セールスマン問題に対するコア選択法

静岡大学 *長谷川和樹 HASEGAWA Kazuki
05000348 静岡大学 呉偉 WU Wei
01704163 名古屋大学 柳浦睦憲 YAGIURA Mutsunori

1. はじめに

古典的な巡回セールスマン問題 (traveling salesman problem, TSP) では各枝のコストは確定的な値として与えられる．しかし，現実の問題では，天気や道の状態等によって変化する値を枝のコストとして考える必要がある場合がある．本研究では各枝のコストを不確かなものとして扱うロバスト巡回セールスマン問題 (robust traveling salesman problem, RTSP) に対して，他のロバスト最適化問題に対して良い性能が示されている反復双対置換 (iterated dual substitution, iDS) 法を適用し，効果を確認した後，新たな手法であるコア選択 (core selection, CS) 法を設計し，有効性を確認する．

2. 問題定義

TSP は，都市に対応する頂点の集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ をもつ有向完全グラフ $G = (V, E)$ と各枝 (i, j) のコスト d_{ij} が与えられたとき，全ての都市を訪問するような巡回路の中でコスト，すなわち巡回路に含まれる枝のコストの総和が最小のものを探す問題である．本研究では，巡回路 (解) の表現として，枝 (i, j) を含むときに 1，そうでないとき 0 となる 0-1 変数 x_{ij} を用いる．

RTSP では，各枝 (i, j) のコストを，入力された閉区間 $[d^-_{ij}, d^+_{ij}]$ の任意の値をとり得る不確定なものとし，その範囲内の枝コストの組合せをシナリオと呼ぶ．シナリオ σ の下での枝 (i, j) のコストを d^σ_{ij} $(\in [d^-_{ij}, d^+_{ij}])$，解 $\boldsymbol{x}$ のコストを $C(\sigma, \boldsymbol{x})$ と記す．シナリオ σ の下での TSP の最適解 $\boldsymbol{x}^*_\sigma$ に対して解 $\boldsymbol{x}$ のリグレットを $r(\sigma, \boldsymbol{x}) = C(\sigma, \boldsymbol{x}) - C(\sigma, \boldsymbol{x}^*_\sigma)$ と表現する．RTSP は最大リグレット $\max_\sigma r(\sigma, \boldsymbol{x})$ を最小化する解 $\boldsymbol{x}$ を探す問題である．解 $\boldsymbol{x}$ に最大リグレットを与えるシナリオ (最悪シナリオ) の 1 つ $\sigma_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{x})$ が

$$d^{\sigma_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{x})}_{ij} = \begin{cases} d^+_{ij} & \text{if } x_{ij} = 1 \\ d^-_{ij} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in E \tag{1}$$

であることが知られている．全ての実行可能解の集合を X とすると，最悪シナリオ $\sigma_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{x})$ を利用することにより，RTSP は以下のように表現できる:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \left\{ \sum_{(i,j) \in E} d^+_{ij} x_{ij} - \min_{\boldsymbol{y} \in X} \sum_{(i,j) \in E} d^{\sigma_{\mathrm{W}}(\boldsymbol{x})}_{ij} y_{ij} \right\}. \tag{2}$$

3. 厳密解法

先行研究 [1] にて，RTSP に対する厳密解法として分枝限定 (branch-and-bound, BB) 法，Benders-like 分解 (Benders-like decomposition, BD) 法，分枝カット (branch-and-cut, BC) 法の 3 つの手法が提案された．その性能として，先行研究 [1] で行われた計算実験では BD 法と BC 法は $n \leq 30$ の問題を厳密に解くことができ，BB 法より優れていることが示された．

4. 発見的解法

4.1. シナリオ固定法

古典的な TSP の実行可能解は RTSP の実行可能解でもある．シナリオ固定法は，固定されたシナリオの下で TSP を厳密に解くことによって RTSP の実行可能解を求める手法である．先行研究 [1] によって，固定するシナリオが中間値シナリオ σ_{M} $(\boldsymbol{d}^{\sigma_{\mathrm{M}}} = (\boldsymbol{d}^+ + \boldsymbol{d}^-)/2)$ の場合は最適値の 2 倍以内のコストの解が得られる保証があることが示され，最大値シナリオ σ_{U} $(\boldsymbol{d}^{\sigma_{\mathrm{U}}} = \boldsymbol{d}^+)$ の場合に最も良い結果が得られたとの報告がある．

4.2. 双対置換法

問題 (2) は 2 段階の最適化問題であるため，通常の 1 段階の最適化問題に比べ解くことが難しい．そこで，$\boldsymbol{y}$ に関する部分問題をその線形緩和の双対問題で置換することによって，その部分問題が最大化問題に置換され，厳密性は失われるものの (2) を 1 段階の最小化問題として扱うことができるようになる．このような手法を双対置換 (dual substitution, DS) 法と呼ぶ．

TSP には，部分巡回路排除モデル，ポテンシャル制約付きモデル，ネットワークフローモデルの 3 種類の数理モデルが既に知られている．本研究ではそれぞれ DFJ，MTZ，GG モデルと呼ぶ．RTSP に対する DS 法には $\boldsymbol{x}$ についての部分問題のモデル 3 種と $\boldsymbol{y}$ についての部分問題のモデル 3 種から，計 9 種類のモデルを考えることができる．

4.3. 反復双対置換法

DS 法は (2) の $\boldsymbol{y}$ に関する部分問題を線形緩和しているため最適性の保証がない．よって，DS 法で得る解を改善する方法として iDS 法が提案された．

iDS 法では，これまでの探索で得られた実行可能解を以後の探索空間 (次の反復で対象とする問題の実行可能領域) から排除する制約条件を追加することによって DS 法を反復的に利用する．この排除制約として，ハミング距離制約と最良シナリオ制約の 2 種類が存在するため，9 種類の DS モデルと組み合わせて計 18 種類のモデルが考えられる．

5. コア選択法

RTSP を厳密に解くことを考えると，その計算時間は枝の本数 $|E|$ に伴って大幅に増加していく傾向がある．そこで，新たに枝集合の部分集合 $C \subseteq E$ を考え，C のみを対象として RTSP を厳密に解く手法を提案する．この手法をコア選択 (core selection, CS) 法と呼ぶ．CS 法では，まず発見的解法でいくつかの実行可能解を構築し，それらの解のいずれかに含まれていた枝全ての集合を C とする．その後，C 内の枝のみを対象に厳密解法を実行して新たな実行可能解を求める．その後は C 内の枝を増やすために，再度発見的解法を実行し，拡張した C で厳密解法を適用する．この反復を $C = E$ となるまで行う．

6. 計算実験

iDS 法の 18 種類のモデルのうち，(2)の $\boldsymbol{y}$ の表現に DFJ モデルを使用するものを除いた 12 種類を実装し，性能を確認した．その結果，$\boldsymbol{x}$ を DFJ モデルで，$\boldsymbol{y}$ を GG モデルで表現した DS 法をハミング距離制約を利用して反復する iDS 法が最も優れた結果を示した．以降，iDS 法にはこの組合せを用いる．また，コア選択法については予備実験の結果により発見的解法として最大値シナリオ σ_{U} を使用したシナリオ固定法が，厳密解法としては BC 法が最も優れた結果を示していたため，この組合せを用いた．

表 1: 小規模問題例に対する平均ギャップ

BD	BC	iDS	CS
0.01%	0.00%	0.19%	0.00%

表 2: 大規模問題例に対する実験結果

	BC		CS	
n	ttb (秒)	gap	ttb (秒)	gap
100	80.4	0.0%	2.6	0.0%
200	2469.2	3.0%	58.1	2.1%
300	2543.9	7.6%	276.4	4.6%
400	2854.2	10.0%	412.2	5.3%
500	1814.9	15.4%	576.5	5.6%
600	2581.3	28.5%	257.3	5.2%
700	2624.4	61.6%	793.5	4.3%
800	2682.3	64.7%	434.9	4.4%
900	2068.4	124.9%	921.8	3.6%
1000	—	—	88.7	2.7%

はじめに，先行研究 [1] で公開されていた 330 題の問題例 ($n \leq 80$) に対して，制限時間を 3600 秒として，BD 法，BC 法，iDS 法，CS 法の計算実験を行った．各手法について，最適値からの相対ギャップの平均値を表 1 に示す．BD 法と iDS 法では時間内に最適解が得られない問題例があった．それに対して，BC 法と CS 法は全ての問題例に対して制限時間内に最適解を得ることができた．

BC 法と CS 法の性能をさらに比較するために，$n \in \{100, 200, \ldots, 1000\}$ の問題例を各 10 題，計 100 題作成し，制限時間を 3600 秒として計算実験を行った．表 2 には，各 n について，各手法で得られた暫定値と BC 法で得られた下界との相対ギャップ (gap) と，最良解にたどり着いた時間 (ttb) の平均値を示す．また，実行可能解すら得られなかった問題例が存在した場合は「—」と記す．CS 法は解の質，求解の速さともに BC 法よりも優れていた．また，BC 法は n の増加に伴って解の質が悪化しており，$n = 1000$ の問題例では実行可能解すら得られないことがあったが，CS 法は n が増加しても解の質が安定していることが確認できる．

参考文献

[1] R. Montemanni, J. Barta, M. Mastrolilli, and L. M. Gambardella. The robust traveling salesman problem with interval data. *Transportation Science*, Vol. 41, No. 3, pp. 366–381, 2007.