

2次元準出生死滅過程における定常分布の漸近解析に関するまとめ

01009830 駒澤大学 *小沢 利久 OZAWA Toshihisa

1. はじめに

準出生死滅過程 (quasi birth-and-death process; QBD process) は, 待ち行列モデルなどの確率モデルを解析するための確率過程として広く用いられてきた. ここで扱う確率過程 (2次元準出生死滅過程, 以下では 2d-QBD 過程と略す) はその 2次元版であり, 2ノードの待ち行列ネットワークなどを表現できる. しかし, 2次元であるが故に一般的な場合について定常分布を求めるのは困難であり, これまで漸近特性の解析を主に行ってきた. その結果として, ある程度のまとまった範囲では答えを得ることができたので, ここで一度それをまとめてみる. なお, ここでは離散時間の場合のみを扱っているが, 連続時間の場合についても, 一様化可能な範囲であれば定常分布の漸近特性について同じ結果が得られる.

2. モデルと仮定

状態空間 $\mathbb{Z}_+^2 \times S_0$ 上の 2d-QBD 過程を $\{\mathbf{Y}_n\} = \{(\mathbf{X}_n, J_n)\}$ とする. S_0 は要素数 s_0 の有限集合, $\mathbf{X}_n = (X_{1,n}, X_{2,n})$ がレベル, J_n が相 (背後状態) である. 待ち行列モデルの場合はレベルが待ち行列長となる. なお, 2d-QBD 過程は skip-free であり, レベル推移はそれぞれの方向に, $-1, 0, 1$ のどれかとなる. 状態空間を, レベルが原点のみ, x_1 軸上, x_2 軸上, その他 (第一象限) の 4つに分け, それら部分集合上の状態からの推移を表す確率ブロックを $A_{i,j}^0, A_{i,j}^1, A_{i,j}^2, A_{i,j}^{1,2}$ とする (図 1). ただし, $i, j \in \{-1, 0, 1\}$ であり, i, j は軸方向の推移の大きさを表す. 境界上からの推移で推移後に状態空間を外れてしまう場合, $\alpha \in \{0, \{1\}, \{2\}\}$ について $A_{i,j}^\alpha$ はゼロ行列とする. $\{\mathbf{Y}_n\}$ の推移確率行列 P はこれらの確率ブロックで構成される. 次を仮定する.

仮定 1. $\{\mathbf{Y}_n\}$ は既約, 非周期的, 正再帰的である.

正再帰的となる条件は [3] を参照. $\{\mathbf{Y}_n\}$ の定常分布を $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}_x, x \in \mathbb{Z}_+^2)$ とする. ただし, $\boldsymbol{\nu}_x = (\nu_{(x,j)}, j \in S_0)$ で $\nu_{(x,j)}$ は状態 (x, j) にある定常確率とする.

次に $\{\mathbf{Y}_n\}$ から 3つの確率過程 (マルコフ加法過程になっている) を構成する. $\{\mathbf{Y}_n^{(1)}\} = \{(X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, J_n^{(1)})\}$ を, x_2 軸上の境界 (反射壁) を取り取り除いて作った, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ \times S_0$ 上の確率過程とし, $X_n^{(1)}$ をレベル, $(X_n^{(2)}, J_n^{(1)})$ を背後過程とした

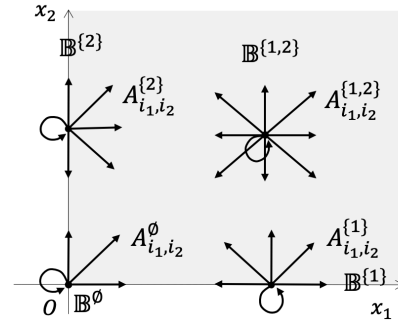


図 1: 推移確率ブロック

場合 ($X_1^{(1)}$ を加法部分とするマルコフ加法過程) の推移確率ブロック (x_1 軸方向の推移確率ブロック) を $A_i^{(1)}, i = -1, 0, 1$, とする. 同様に, x_1 軸上の境界 (反射壁) を取り取り除いて作った, $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z} \times S_0$ 上の確率過程を $\{\mathbf{Y}_n^{(2)}\}$ とし, x_2 軸方向での推移確率ブロックを $A_i^{(2)}, i = -1, 0, 1$, とする. 両方の境界を取り除いて作った, $\mathbb{Z}^2 \times S_0$ 上の確率過程を $\{\mathbf{Y}_n^{(1,2)}\}$ とする. 推移確率ブロックは $A_{i,j}^{(1,2)}, i, j = -1, 0, 1$, で与えられる. 次を仮定する.

仮定 2. $\{\mathbf{Y}_n^{(1)}\}, \{\mathbf{Y}_n^{(2)}\}, \{\mathbf{Y}_n^{(1,2)}\}$ は既約で非周期的である.

仮定 3. $\{\mathbf{Y}_n^{(1,2)}\}$ の状態空間を, 反射壁は設けず, それぞれ $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times S_0, \mathbb{Z}_{\leq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times S_0, \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\leq 0} \times S_0$ に制限して作った確率過程 (吸収マルコフ連鎖) はどれも既約で非周期的である.

ここで $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ はゼロ以下の整数, $\mathbb{Z}_{\geq 0} = \mathbb{Z}_+$ である. 仮定 3 は, 占有測度 (吸収までの平均訪問回数) がすべて正となるように設けたものである. この仮定の下, $\sum_{i,j} A_{i,j}^{(1,2)}$ も既約で非周期的となる. なお, モデルの詳細な記述は [4, 5] を参照.

3. 定常分布の漸近特性

定常分布の裾方向を示すベクトルを $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}_+$ とし, その方向での定常確率ベクトル列 $\{\boldsymbol{\nu}_{x+k\mathbf{c}}\}_{k \geq 0}$ がどのように減衰するかを, 以下で定義される減衰率 $\xi_{\mathbf{c}}$ と減衰関数 $h_{\mathbf{c}}$ で表すことにする.

$$\xi_{\mathbf{c}} = - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \nu_{(x+k\mathbf{c}, j)} \quad (1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\nu}_{k\mathbf{c}} / h_{\mathbf{c}}(k) = \mathbf{g}_{\mathbf{c}} \quad (2)$$

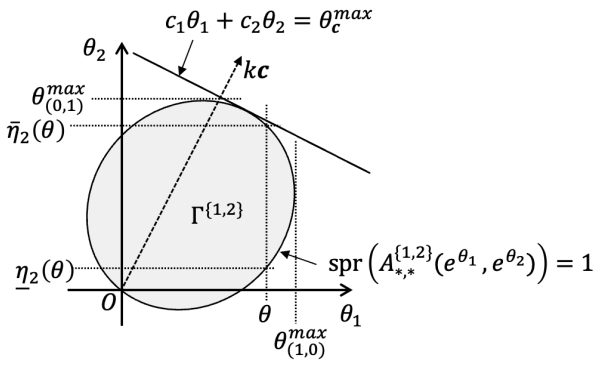


図 2: 領域 $\Gamma^{\{1,2\}}$

ここで, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^2$, $j \in S_0$, \mathbf{g}_c はある正ベクトルとする. 仮定 3 の下, ξ_c は \mathbf{x}, j に依存しない.

方向ベクトルが $\mathbf{c} = (1, 0)$ または $\mathbf{c} = (0, 1)$ の場合については, [1] の Corollary 4.3 で ξ_c を, [2] の Theorem 2.1 で $h_c(k)$ を与えた. これらの結果には一部, 不完全なところも残るが, 軸方向の漸近特性についてはこれらによって一定の結果が得られた. $c \geq 2$ に対して $\mathbf{c} = (c, 0)$ または $\mathbf{c} = (0, c)$ の場合はこれに含まれる. 方向ベクトルが $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \geq (1, 1)$ の場合については, [4] の Theorem 3.2 で ξ_c と $h_c(k) = e^{-\xi_c k}$ となる十分条件を与えた.

残ったのは $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \geq (1, 1)$ の場合における $h_c(k)$ の, [4] では言及されていない条件下での形であるが, それについて次節で示す. 詳細については [5] を参照.

4. 任意方向での減衰率と減衰関数

$\{\mathbf{Y}_n^{\{1,2\}}\}$ に関し, 推移確率ブロックの母関数を

$$A_{*,*}^{\{1,2\}}(z, w) = \sum_{i,j \in \{-1,0,1\}} z^i w^j A_{i,j}^{\{1,2\}}$$

で与え, 最大固有値の大きさを spr とし, 領域 $\Gamma^{\{1,2\}}$ を

$$\Gamma^{\{1,2\}} = \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : \text{spr}(A_{*,*}^{\{1,2\}}(e^{\theta_1}, e^{\theta_2})) < 1\}$$

で定義する. 仮定 1, 3 の下, 領域 $\Gamma^{\{1,2\}}$ の閉包は有限な凸集合となる. 方向ベクトルを $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ とし,

$$\theta_c^{\max} = \sup\{c_1\theta_1 + c_2\theta_2 : (\theta_1, \theta_2) \in \Gamma^{\{1,2\}}\}$$

とする (図 2). 方程式 $\text{spr}(A_{*,*}^{\{1,2\}}(e^{\theta_1}, e^{\theta_2})) = 1$ の実数解を $\theta_2 = \eta_2(\theta_1), \bar{\eta}_2(\theta_1)$ とし (図 2), $\underline{\eta}_1(\theta_2), \bar{\eta}_1(\theta_2)$ も同様に与える. また, $\{\mathbf{Y}_n^{\{1\}}\}$ に関し,

$$\bar{A}_*^{\{1\}}(z) = \sum_{i \in \{-1,0,1\}} z^i \bar{A}_i^{\{1\}}$$

とし, cp を convergence parameter とて,

$$\theta_1^* = \sup\{\theta \in \mathbb{R} : \text{cp}(\bar{A}_*^{\{1\}}(e^\theta))^{-1} < 1\} \leq \theta_{(1,0)}^{\max}$$

を定義する. θ_1^* は, x_1 軸方向における定常分布の漸近特性を特徴付ける量であり, x_2 軸上の境界の影響を受

けない場合は x_1 軸方向の減衰率 ($\xi_{(1,0)} = \theta_1^*$) となる. $\{\mathbf{Y}_n^{\{2\}}\}$ に関し, θ_2^* を同様に与える.

2d-QBD 過程では, 境界上の推移確率が内部とは異なるため, \mathbf{c} 方向の漸近特性に境界上での挙動が影響を与える. ただし, それは方向 \mathbf{c} により異なる. [4, 5] では, 影響を受ける範囲の形式に応じてモデルを 4 つのタイプに分けた. その内, Type 1 は $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ の傾きに応じて, x_1 軸上の境界の影響のみを受ける範囲 ($-\frac{c_1}{c_2} \leq \bar{\eta}_2(\theta_1^*)$), 影響を受けない範囲 ($\bar{\eta}_2(\theta_1^*) < -\frac{c_1}{c_2} < \bar{\eta}_1(\theta_2^*)^{-1}$), x_2 軸上の境界の影響のみを受ける範囲 ($-\frac{c_1}{c_2} \geq \bar{\eta}_1(\theta_2^*)^{-1}$) に分かれる形式である. ここで, $\bar{\eta}_1(\theta_2), \bar{\eta}_2(\theta_1)$ は導関数で, 曲線 $\text{spr}(A_{*,*}^{\{1,2\}}(e^{\theta_1}, e^{\theta_2})) = 1$ の傾きを表す. [4] で残したのは Type 1 の一部の場合なので, ここでは Type 1 についてのみ結果を示す. 減衰率は次で与えられる.

$$\xi_c = \begin{cases} c_1\theta_1^* + c_2\bar{\eta}_2(\theta_1^*) & \text{if } -\frac{c_1}{c_2} < \bar{\eta}_2(\theta_1^*) \\ \theta_c^{\max} & \text{if } \bar{\eta}_2(\theta_1^*) \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq \bar{\eta}_1(\theta_2^*)^{-1} \\ c_1\bar{\eta}_1(\theta_2^*) + c_2\theta_2^* & \text{if } -\frac{c_1}{c_2} > \bar{\eta}_1(\theta_2^*)^{-1} \end{cases}$$

減衰関数は次で与えられる.

$$h_c(k) = \begin{cases} e^{-\xi_c k} & \text{if } -\frac{c_1}{c_2} \leq \bar{\eta}_2(\theta_1^*) \\ k^{-\frac{1}{2}(2l-1)} e^{-\xi_c k} & \text{if } \bar{\eta}_2(\theta_1^*) < -\frac{c_1}{c_2} < \bar{\eta}_1(\theta_2^*)^{-1} \\ e^{-\xi_c k} & \text{if } -\frac{c_1}{c_2} \geq \bar{\eta}_1(\theta_2^*)^{-1} \end{cases}$$

ここで, l は 1 以上の整数である. 定常確率ベクトル列 $\{\nu_{kc}\}_{k \geq 1}$ のベクトル母関数を $\varphi^c(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \nu_{kc}$ とすると, $\bar{\eta}_2(\theta_1^*) < -\frac{c_1}{c_2} < \bar{\eta}_1(\theta_2^*)^{-1}$ の場合, $z = e^{\theta_c^{\max}}$ は複素関数ベクトル $\varphi^c(z)$ の 1 次の分岐点となることが分かり, $h_c(k) = k^{-\frac{1}{2}(2l-1)} e^{-\xi_c k}$ が得られる. $l = 1$ となると予想されるが, まだ確かめられていない.

5. おわりに

$l = 1$ となることを示すには, $\varphi^c(z)$ が $z = e^{\theta_c^{\max}}$ で発散することを示せばよい. この点についての検討を進めている.

参考文献

- [1] Ozawa, T., Asymptotics for the stationary distribution in a discrete-time two-dimensional quasi-birth-and-death process, Queueing Systems 74 (2013).
- [2] Ozawa, T., Kobayashi, M., Exact asymptotic formulae of the stationary distribution of a discrete-time two-dimensional QBD process, Queueing Systems 90 (2018).
- [3] Ozawa, T., Stability condition of a two-dimensional QBD process and its application to estimation of efficiency for two-queue models, Performance Evaluation 130 (2019).
- [4] Ozawa, T., Tail Asymptotics in any direction of the stationary distribution in a two-dimensional discrete-time QBD process, Queueing Systems 102 (2022).
- [5] Ozawa, T., Asymptotic decay function of the stationary tail probabilities along an arbitrary direction in a two-dimensional discrete-time QBD process (2023). arXiv:2301.02434