日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

ポアソン過程のみで駆動される確率的制御問題と変分不等式の粘性解

01307080 早稲田大学 豊泉 洋 TOYOIZUMI Hiroshi

1. はじめに

ポアソン過程のみで確率的に駆動される経路を持つ最適制御問題を考え、その価値関数を 1 階微分の輸送型ハミルトン-ヤコビ-ベルマン (HJB) 変分不等式の粘性解として定式化して解く。具体例として、商品の販売がポアソン過程によって生じる事業で、倒産を避けるために現金（流動性資産）のレベルを維持しながら、その利益の一部を投資家に配当する最適化問題を考える [4]。

一般に、ブラウン運動によって駆動される経路上での確率的最適制御問題は、2 階微分を含む楕円型 HJB 変分不等式の粘性解（微分可能性を仮定しない弱解の一種 [2]）に帰着される。さらに、ブラウン運動によって制御が撹乱されることから生じる価値関数の 2 階までの微分可能性を利用した smooth fit 条件を使い、具体的な問題に対して解を導く方法が研究されている [3]。

ここでは、ブラウン運動の効果が存在せず、ポアソン過程のジャンプのみが確率的な影響を与える最適化問題を考える。ポアソン過程の伊藤の補題、動的計画法の最適性原理、さらに Mecke の公式 [1] を使うことで、最適化問題における価値関数が 1 階微分のみを含む輸送型 HJB 変分不等式の粘性解となり、その解が連続的に 1 階微分可能であり、smooth fit 条件を満たすことを示す。さらに、この smooth fit 条件とジャンプがもたらす境界領域条件を用いて遅れ付き微分方程式を解き、具体的な配当の最適制御法を導く方法について議論する。

2. ジャンプのある経路上での配当配分問題

レート 1 の事業運営コストの下で、レート λ のポアソン過程 N_t によって確定的な売り上げ σ が生じる事業を考える。現金レベル X_t が 0 を下回り倒産してしまうリスクを避けながら、投資家に利益の一部を配当 Z として最大限配分する最適制御問題を考える。以下では、長期的に見れば利益が出る事業を考え、$\lambda\sigma > 1$ を仮定する。

時刻 t での現金レベル X_t は右連続左極限を持つ確率過程であり、次の確率微分方程式を満たす。

$$dX_t = \begin{cases} \sigma dN_t - dt - dZ_t, & (X_t > 0), \\ 0 & (X_t \le 0). \end{cases}$$

σdN_t は時刻 t での固定価格 σ の商品の売上、$-dt$ は事業運営コスト、dZ_t は投資家への配当に相当する。また、$X_t = 0$ では余裕資金がなく事業継続不能（倒産）となり、それ以降配当もできない。時刻 0 で $X_0 = x$ を初期条件としたとき（この時の現金レベル過程を X_t^x と表す）、経営者は次のように利率 r で割引された累積配当の期待値最大化を目標とする。

$$v(x) = \sup_Z E_x\left[\int_0^\infty e^{-rt} dZ_t\right].$$

上の sup は、各時刻で $X_t^x \ge 0$ を満たし N_t に適合した配当過程 Z の全体を対象とする。$v(x)$ は価値関数と呼ばれ、この関数を実現することで最適な配当戦略 Z が求められる。

3. 価値関数 v の性質

二つの非負初期値 x_1 と x_2 とその最適配当戦略 Z_1 と Z_2 に対して、凸結合 $Z = \alpha Z_1 + (1-\alpha)Z_2$ は最適とは限らないが有効な配当戦略なので、価値関数 v は $[0,\infty)$ で上に凸な関数であり、したがって連続関数である。

また、$X_t^x \le 0$ でも事業を継続し、$\sigma dN_t - dt$ だけ配当を続けることを考え、Mecke の公式（または $dN_t - \lambda dt$ がマルチンゲールであること）を使えば、v のアプリオリ評価として

$$v(x) \le x + E\left[\int_0^\infty e^{-rt}(\sigma dN_t - dt)\right] = x + \frac{\lambda\sigma - 1}{r} \quad (1)$$

という線型増大条件が得られる。さらに、$x \le 0$ では $X_t^x, Z_t \equiv 0$ なので $v(x) = 0$ である。

一方、最適性原理から任意の $h > 0$ に対して、

$$v(x) = \sup_Z E\left[\int_0^h e^{-rt} dZ_t + e^{-rh} v(X_h^x)\right] \quad (2)$$

が得られる。

4.　輸送型 HJB 変分不等式の粘性解

価値関数 v の微分可能性は保証されていないが、経路にジャンプがあるポアソン過程での伊藤の補題、最適性原理 (2)、さらに Mecke の公式を使うことで、v が $(0,\infty)$ 上で以下の輸送型 HJB 変分不等式の粘性解であることが示せる。

$$\min(rv + v' - \lambda(v(\cdot+\sigma) - v), v' - 1) = 0. \quad (3)$$

すなわち、下から $\bar{x}$ のみで接し v を近似する任意の滑らかなテスト関数 φ が、v の代わりに

$$\min(r\varphi(\bar{x}) + \varphi'(\bar{x}) - \lambda(\varphi(\bar{x}+\sigma) - \varphi(\bar{x})), \varphi'(\bar{x}) - 1) \geq 0$$

を満たし（粘性優解）、さらに上から $\bar{x}$ のみで接する任意の滑らかなテスト関数 ϕ が

$$\min(r\phi(\bar{x}) + \phi'(\bar{x}) - \lambda(\phi(\bar{x}+\sigma) - \phi(\bar{x})), \phi'(\bar{x}) - 1) \leq 0$$

を満たす（粘性劣解）。v が上に凸なので下から接する滑らかなテスト関数 φ が必ずしも存在するとは限らないが、存在しない点では上の不等式を満たす必要はない。また、(1) より比較原理 [3] も成立し、v は (3) の唯一の粘性解である。

5.　価値関数 v の微分可能性

価値関数 v は $[0,\infty)$ で上に凸な非減少関数なので右微分と左微分が存在する。右微分と左微分が異なれば、その中間の微係数を持つテスト関数 ϕ が作れ、v が粘性劣解であることと矛盾し、$v \in C^1(0,\infty)$ であることが示せる。特に、自由境界点 $a = \inf\{x \geq 0 : v'(x) \leq 1\}$ でも 1 階微分が連続であり、その意味で smooth fit が成立する。

6.　境界領域条件と遅れ付き微分方程式

$x \leq a$ に対しては、$v' - 1 > 0$ なので、

$$v + v' - \lambda(v(\cdot+\sigma) - v) = 0 \quad (4)$$

という $-\sigma$ の遅れ付き微分方程式が成立する。一方、$x \geq a$ では $v' - 1 = 0$ なので、ある定数 b が存在して $v(x) = x + b$ である。これが遅れ付き微分方程式 (4) の $[a, a+\sigma]$ での境界領域条件となる。この境界領域条件を使うと、$x \in [a-\sigma, a]$ に対して、

$$v(x) + v'(x) - \lambda(x + \sigma + b - v(x)) = 0$$

が成立し、smooth fit 条件 $v'(a) = 1$ と $v(a) = a+b$ のもとで解くと、$b = (\lambda\sigma - 1)/r - a$ と決定され、$[a-\sigma, a]$ 上で

$$v(x) = \frac{\lambda}{\lambda+r}\left(x + \sigma + b - \frac{1}{\lambda+r}\right) - \frac{r}{(\lambda+r)^2} e^{(\lambda+r)(a-x)} \quad (5)$$

が得られる。(5) で直接 $x = 0$ として $v(0) = 0$ の境界条件より a が決定できる可能性もあるが（図 1)、同時に $a - \sigma \leq 0$ を満たす必要がある。これが成り立たない場合には、$a - \sigma$ での smooth fit 条件のもとで、(5) を $[a-\sigma, a]$ での境界領域条件として $[a - 2\sigma, a - \sigma]$ 上で遅れ付き微分方程式 (4) を解き、$v(0) = 0$ の境界条件との整合性をチェックする。整合しない場合は、これをさらに繰り返すことで a を求める。また、この a を用いた $dZ_t = (X_t - a)^+$ が最適配当戦略である。

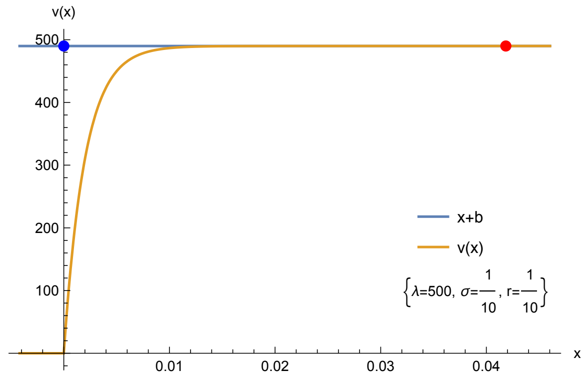

図 1: 価値関数 v の例 ($a = 0.042, b = 490$)

参考文献

[1] F. Baccelli and P. Brémaud. *Elements of queueing theory: Palm Martingale calculus and stochastic recurrences*, volume 26. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] S. Koike. A beginner's guide to the theory of viscosity solutions. *MSJ Mem.*, 2004.

[3] H. Pham. *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications*, volume 61. Springer Science & Business Media, 2009.

[4] R. Radner and L. Shepp. Risk vs. profit potential: A model for corporate strategy. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 20(8):1373–1393, 1996.