不可分なタスクの公平配分問題における EFX 配分

01112000　京都大学　小林佑輔　KOBAYASHI Yusuke
05001471　京都大学　*馬原凌河　MAHARA Ryoga

1. はじめに

不可分財の公平配分理論において，EFX(envy-free up to any item) は最も説得力のある近似的な公平性の概念として重要視されており，活発な研究が行われている．近年，EFX の概念が不可分なタスクの公平配分問題に拡張された．財配分，タスク配分のいずれの場合も，一般に EFX 配分が存在するかどうかは重要な未解決問題であり，既存研究では，様々な特殊ケースに対して EFX 配分の存在が議論されている．

2. 問題設定

エージェントの集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，不可分なタスク (アイテム) の集合を $M = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ とする．各エージェント $i \in N$ は**コスト関数** $c_i : 2^M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ をもつ[1]．本研究では，コスト関数はすべて**加法的**であると仮定する．すなわち，任意の $i \in N$ と任意の $S \subseteq M$ に対して，$c_i(S) = \sum_{g \in S} c_i(\{g\})$ が成り立つ．

我々の目標は「公平な」タスクの**配分** $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ を求めることである．ここで，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は M の分割であり，アイテム集合 X_i はエージェント i への配分を意味する．

無羨望性 (envy-freeness) は代表的な公平性の指標のひとつである．配分 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が**無羨望配分**であるとは，任意の $i, j \in N$ に対して，$c_i(X_i) \leq c_i(X_j)$ が成り立つことを言う．すなわち，無羨望配分においては，どのエージェントも他のエージェントを羨望しない．

不可分なタスク (および財) の公平配分問題においては，無羨望配分の存在は必ずしも保証されない．そこで，近似的な無羨望性の存在に関する研究が行われている．その中でも EFX は最も説得力のある公平性の概念として特に重要視されている．配分 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ が **EFX 配分**であるとは, 任意の $i, j \in N$ と任意の $g \in X_i$ に対して，$c_i(X_i \setminus \{g\}) \leq c_i(X_j)$ が成り立つことを言う．すなわち，EFX 配分においては，どのエージェントも，自身の任意のアイテムをひとつ取り除けば，他のエージェントを羨望しないことが保証される．

3. 本研究の主結果

本研究では，不可分なタスクの公平配分問題に対して，各エージェントが加法的なコスト関数をもつ場合に，以下のそれぞれのケースで EFX 配分が常に存在することを示した．

(1) $m \leq 2n$ の場合
(2) ひとりのエージェントを除いて，各エージェントのコスト関数が**同一の選好順序**[2]である場合
(3) $n = 3$ で，各エージェントが (それぞれ異なってもよい) 2 値コスト関数をもつ場合

証明は構成的であり，いずれの場合についても EFX 配分を求める多項式時間アルゴリズムを与える．

4. 先行研究

不可分なタスクの公平配分問題における EFX 配分の存在については，不可分財の場合と比べてあまりよくわかっていない．Chen と Liu [1] はすべてのエージェントが同一のコスト関数をもつ場合に EFX 配分が存在することを示した．この結果の系として，Cut-and-Choose プロトコルを用いて，$n = 2$ の場合に EFX 配分が存在することが容易に示される．また，Li ら [2] はすべてのエージェントのコスト関数が同一の選好順序である場合について存在を示した．Zhou と Wu [3] は $n = 3$ で，各エージェントが同一の 2 値コスト関数をもつ場合について存在を示した．

このように，非常に限定的な場合でのみ EFX 配分の存在が示されているというのが現状である．一般の n, m で各エージェントが同一の 2 値コスト関数をもつ場合や，$n = 3$ で一般の加法的コスト関数をもつ場合でさえ EFX 配分が存在するかどうかは未解決である．

[1] 各エージェント i が非正値評価関数 $v_i : 2^M \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ をもつとするのが本来の設定である．本稿では，$c_i := -v_i$ として議論している．

[2] $i, j \in N$ に対して，i と j のコスト関数が**同一の選好順序**であるとは，任意の $g, g' \in M$ に対して，$c_i(g) < c_i(g') \iff c_j(g) < c_j(g')$ であることを言う．

5.　EFX グラフ

我々はそれぞれの結果を示すために **EFX グラフ**と呼ばれる二部グラフを新たに導入する．U をサイズ n の集合とし，$M' \subseteq M$ に対して，$X = (X_u)_{u \in U}$ を (M' の) U への配分とする．

EFX グラフ $G_X = (N, U; E)$ を次のように定義する．任意の $i \in N$ と $u \in U$ に対して，

$$(i, u) \in E \iff \max_{g \in X_u} c_i(X_u \setminus \{g\}) \leq \min_{k \in U} c_i(X_k)$$

と定める．つまり，$(i, u) \in E$ は，エージェント i にとって，$X = (X_u)_{u \in U}$ の中で X_u を受け取ったとすると，EFX の条件が満たされていることを意味する．特に，$X = (X_u)_{u \in U}$ が M の U への配分であり，次の条件 (P) を満たすならば，EFX 配分を求めることができる．

(P) G_X は完全マッチングをもつ

6.　EFX グラフを使って結果を示す方法

以下では，(1) と (2) の結果に焦点を当てて，証明のアイデアを説明する．

6.1.　$m \leq 2n$ の場合

もし，$m \leq n$ であれば，各エージェントに高々ひとつのアイテムを配分すれば EFX 配分となる．以下では，$m = n + l$ $(1 \leq l \leq n)$ とする．我々の基本的なアイデアはつぎの通りである．

はじめに任意の $u \in U$ に対して $X_u = \emptyset$ として U への配分 $X = (X_u)_{u \in U}$ をつくる．そして，条件 (P) を保ちながら，アイテムをひとつずつ順に X のいずれかのアイテム集合へ追加する．もし，すべてのアイテムを配り終えたときに (P) を満たしていれば，EFX 配分を求めることができる．

しかしながら，適当な順番でアイテムを追加していくと一般には (P) を保持することはできない．そこで，はじめに l 人 (たとえば $1, 2, \ldots, l$) がこの順に自分自身にとって最もコストの小さいアイテムをひとつずつ選んで保持しておく．その後，残った n 個のアイテムで U への配分 $X = (X_u)_{u \in U}$ をつくる．ただし，任意の $u \in U$ に対して $|X_u| = 1$ となるようにする．そして，先ほどとは逆の順 ($l, \ldots, 1$ の順) で，$X = (X_u)_{u \in U}$ の中で自身にとって最もコストの小さい集合へ保持しておいたアイテムを追加していく．すると，アイテムを追加していく操作において，(P) を絶えず保持することが帰納法によって示される．

6.2.　$1, \ldots, n-1$ のコスト関数が同一の選好順序である場合

本節では，N の代わりに，$N \setminus \{n\}$ を一方の頂点集合としたものを G_X と定める．我々のアイデアは，次の条件 (Q) を満たす配分を構成することである．

(Q) 任意の $u \in U$ に対して，$G_X - u$ が完全マッチングをもつ

もし，(Q) を満たす配分を構成できれば，つぎのように EFX 配分を求めることができる．まず，エージェント n へ $(X_u)_{u \in U}$ の中で n にとって最もコストの小さい集合 X_{u^*} を配分する．条件 (Q) より，$G_X - u^*$ はある完全マッチング A をもつ．そこで，A を用いて残った $n-1$ 人へ残りの $n-1$ 個のアイテム集合を配分する．

問題は (Q) を満たす配分を構成することであるが，実は $n-1$ 人のコスト関数が同一の選好順序を持つ場合，つぎのような単純な手順で求めることができる．はじめに，任意の $i \in N \setminus \{n\}$ に対して，$c_i(g_{k_1}) \geq c_i(g_{k_2}) \geq \cdots \geq c_i(g_{k_m})$ となるようにアイテムをソートする．(1) と同様に，任意の $u \in U$ に対して $X_u = \emptyset$ として U への配分 $X = (X_u)_{u \in U}$ をつくる．そして，アイテムを $(X_u)_{u \in U}$ の中のいずれかのアイテム集合にひとつずつ追加する．このとき実は，アイテムの追加前に (Q) を満たしていれば追加後も (Q) を満たすようなアイテム集合が少なくともひとつ存在することを示すことができる．

謝辞

本研究は，京都大学とトヨタ自動車の共同研究プロジェクト「モビリティ基盤数理の研究」の支援を受けている．

参考文献

[1] X.Chen and Z. Liu: The fairness of leximin in allocation of indivisible chores, arXiv preprint arXiv:2005.04864, 2020

[2] B. Li, Y. Li, and X. Wu: Almost (Weighted) Proportional Allocations for Indivisible Chores, Proc. of the ACM Web Conference, 122–131, 2022

[3] S. Zhou and X. Wu: Approximately EFX allocations for indivisible chores , arXiv preprint arXiv:2109.07313, 2021