日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

Polyhedral Clinching Auctions for Indivisible Goods

05001643　東京大学　*佐藤良亮　SATO Ryosuke
01507724　東京大学　平井広志　HIRAI Hiroshi

1.　はじめに

予算制約を伴う複数財のオークションは応用上重要であるとともに難しい問題設定であり，通常のオークションにおける主要な目標（誘因両立性，個人合理性，社会余剰の最大化）を達成するメカニズムが存在しないことが知られている (e.g. Dobzinski et al. [1])．一方で，同質財の場合には，[1] において誘因両立性，個人合理性，パレート最適性を同時に達成するメカニズムが提案された．このメカニズムは Ausubel [2] の Clinching Auction の枠組みに則ったものであり，以後，彼らの提案メカニズムをより広い問題設定に適用できるように一般化する研究が進められてきた．

その最たるものが Goel et al. [3] の Polyhedral Clinching Auction である．これは，ポリマトロイド理論を巧みに利用することで，優れた性質を保ちながら財の配分にポリマトロイド制約がある場合でも適用できるメカニズムとなっている．また，特定の仮定のもとで Hirai and Sato [4] や Sato [5] によって双方向市場に拡張されるなど，更なる広がりも見せている．一方で，このメカニズムは可分財の場合に対してのみ提案されている．

本研究では，不可分財の場合における Polyhedral Clinching Auction を提案し，優れた性質を満たすことを示した．

2.　問題設定と目標

1名の売り手が主催者として m 個の不可分な同質財を出品し，複数の買い手が予算の許す範囲でその財を多く欲する状況を考える．$N := \{1, 2, \ldots, n\}$ を買い手の集合とする．買い手 $i \in N$ はその財 1 個の価値を表す評価額 $v_i \in \mathbf{R}_+$ とオークション全体の支払額に対する予算 $B_i \in \mathbf{R}_+$ を持つ．そして，各買い手は評価額に対応する入札額 $v'_i \in \mathbf{R}_+$ と予算 B_i を売り手に申告する．各買い手は自己の利得の最大化を目論むため，必ずしも $v_i = v'_i$ $(i \in N)$ とはならない点に留意が必要である．

売り手は申告された情報をもとにオークションの割当を定める．割当 $\mathcal{A} := (x, p)$ は $x \in \mathbf{Z}_+^N$ と $p \in \mathbf{R}^N$ の組であり, x は各買い手の獲得する財の数，p は各買い手の支払額を表す．なお，割当は予算制約 $p_i \leq B_i$ $(i \in N)$ とポリマトロイド制約 $x \in P$ を満たす必要がある．

割当 $\mathcal{A}$ に対し，参加者の効用が定められる．買い手 $i \in N$ の効用は次式で定義される：

$$u_i(\mathcal{A}) := \begin{cases} v_i x_i - p_i & \text{if } p_i \leq B_i, \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

また，売り手の効用は $u_s(\mathcal{A}) := \sum_{i \in N} p_i$ である．

主催者の利用できる情報を $\mathcal{I}$ とすると，$\mathcal{I} := (N, \{v'_i\}_{i \in N}, \{B_i\}_{i \in N}, P)$ と表される．このとき，情報 $\mathcal{I}$ から割当 $\mathcal{A}$ を与えるメカニズム $\mathcal{M} : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ を適切に設計することが目標となる．

本研究の目標は，以下の性質を満たすような効率的なメカニズムの設計である：

1. 誘因両立性 (IC): 任意の買い手 $i \in N$ において正直な入札が最善の戦略となる．つまり，$u_i(\mathcal{M}(\mathcal{I})) \leq u_i(\mathcal{M}(\mathcal{I}_i))$ $(i \in N)$．ただし，$\mathcal{I}_i$ は $\mathcal{I}$ における買い手 i の入札額 v'_i を v_i に置き換えたものである．
2. 個人合理性 (IR): 任意の買い手 $i \in N$ について効用が非負となる入札額が存在. IC のもとでは $u_i(\mathcal{M}(\mathcal{I}_i)) \geq 0$ $(i \in N)$ を意味する．

メカニズムの効率性評価における代表的な指標が社会余剰（SW）であり，$\mathrm{SW}(\mathcal{A}) := \sum_{i \in N} v_i x_i$ と定義される．これは各買い手に割り当てられた財への評価額の合計である．一方で，予算制約のもとでは，IC と IR を満たしながら最適な SW に対する定数近似が不可能であると知られており，予算制約のもとでは流動的余剰 (LW) がしばしば用いられる．これは $\mathrm{LW}(\mathcal{A}) := \sum_{i \in N} \min(v_i x_i, B_i)$ として定義され，各買い手が自身に割り当てられた財に対して支払える金額の合計である．別の方向としては，パレート最適性 (PO) があり，メカニズム $\mathcal{M}$ が PO を満たすとは，各参加者（買い手・売り手）の効用において $\mathcal{M}$ の割当の完全上位互換となる別の割当が存在しないことをいう．

3. 本研究の貢献

Goel et al. [3] の Polyhedral Clinching Auction を不可分財に拡張し，IC と IR を満たすメカニズムを提案した．また，提案メカニズムの効率性について以下を示した：

1. PO を満たす
2. LW について，LW の最適値の 1/2 以上を達成
3. SW について，LW の最適値以上を達成

提案メカニズムは，Fiat et al. [6] や Colini-Baldeschi et al. [7] のメカニズムを二部グラフからポリマトロイド制約へ一般化したものとも捉えられる．双方向市場への拡張も今後期待されるため，本研究は Clinching Auction の適用範囲を大きく広げることに資するものだと考えられる．

また，[6,7] における効率性評価は 1. のみであるため，既存研究の効率性評価を強化した点も本研究の貢献である．上記 2. と 3. は Sato [5] において異なる設定のもとで Polyhedral Clinching Auction に対して示された効率性の理論保証であり，本研究では提案メカニズムにおいても同様の理論保証が成り立つことを示した．

4. 提案メカニズムの概要

価格 c を 0 から徐々に釣り上げていく．この価格は買い手が財を取引するときの取引価格となる．価格 c に対して需要 $d := (d_i)_{i \in N}$ が定まり，価格 c のもとでの買い手 i の需要 d_i は

$$d_i := \begin{cases} \min\{d_i^0 - x_i, \lfloor (B_i - p_i)/c \rfloor\} & \text{if } c < v_i', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

として定義される．ただし，d_i^0 は買い手 i の需要の初期値であり，x_i と p_i はそれぞれ買い手 i の現在までの取引量と支払額である．なお，$f : 2^N \to \mathbf{Z}_+$ をポリマトロイド P に対応する単調劣モジュラ関数として $d_i^0 = f(\{i\}) + 1 \quad (i \in N)$ と定める．

全員の需要が 0 になるまで以下の反復を行う：

1. 以下の 2. か 3. で需要が更新される買い手が存在する最小の値まで価格を釣り上げる
2. 価格=入札額である買い手の需要を順番に 0 に更新し，その度に取引量を計算 (5 節)
3. 各買い手の需要を価格に関する右極限値へと順番に更新し，その度に取引量を計算 (5 節)

このとき，各反復で買い手の需要の総和が 1 以上減少するため，反復回数は $\mathrm{O}(mn)$ 回となる．

5. 取引量の計算方法

各反復における取引量の計算は,「他の買い手の取引可能な量を妨げない範囲で最大限取引する」というルールのもとで行われる．これは，ポリマトロイド理論に基づいて以下のように表現される．ポリマトロイド P と現在までの取引量 $x \in P$ と需要 $d \in \mathbf{Z}_+^N$ に対して，以後取引可能な量を表す多面体 $P_{x,d}$ を $P_{x,d} := \{y \in \mathbf{Z}_+^N \mid x + y \in P, y \leq d\}$ と定義する．さらに，買い手 i が $u_i \in \mathbf{Z}_+$ だけ財を取引するとき，他の買い手の以後取引可能な量を表す多面体は $P_{x,d}^i(u_i) := \{u_{-i} \in \mathbf{Z}_+^{N \setminus i} \mid (u_i, u_{-i}) \in P_{x,d}\}$ と表される．このとき，i のその反復での取引量 ξ_i を $\xi_i = \sup\{u_i \geq 0 \mid P_{x,d}^i(u_i) = P_{x,d}^i(0)\}$ と定める．これは，劣モジュラ関数の最小化アルゴリズムによって多項式時間で計算できる．

謝辞

本研究は，JSPS 科研費 JP21K19759 および JP22J22831 の支援を受けたものである．

参考文献

[1] S. Dobzinski, R. Lavi, and N. Nisan. Multi-unit auctions with budget limits. *Games Econ. Behav.*, 74 (2012), 486–503.

[2] L. M. Ausubel. An efficient ascending-bid auction for multiple objects. *Am. Econ. Rev.*, 94 (2004), 1452–1475.

[3] G. Goel, V. Mirrokni, and R. P. Leme. Polyhedral clinching auctions and the adwords polytope. *J. ACM*, 62 (2015), 1–27.

[4] H. Hirai and R. Sato. Polyhedral clinching auctions for two-sided markets. *Math. Ope. Res.*, 47 (2022), 259–285.

[5] R. Sato. Polyhedral clinching auctions with single samples, *in preparation.*

[6] A. Fiat, S. Leonardi, J. Saia, and P. Sankowski. Single valued combinatorial auctions with budgets, in: *Proc. of EC'11*, 223–232, 2011.

[7] R. Colini-Baldeschi, S. Leonardi, M. Henzinger, and M. Starnberger. On multiple keyword sponsored search auctions with budgets. *ACM Trans. Econ. Comput.*, 4 (2015), 1–34.