# 2部グラフ上のポピュラーマッチングの最大数

05001484　筑波大学　*夏井慧　NATSUI Kei
01206770　筑波大学　繁野麻衣子　SHIGENO Maiko

## 1.　はじめに

安定マッチングを一般化した概念に，ポピュラーマッチング [1] がある．ポピュラーマッチングのなかで安定性の条件を満たすものは安定マッチングとなるが，安定マッチングよりもペア数の多いポピュラーマッチングも存在する．しかし，ペア数最大でも最小でもないポピュラーマッチングを見つけることはNP-困難であり [2]，ある入力に対して複数あるポピュラーマッチングの可能なペア数やポピュラーマッチングの最大数などは十分な議論が未だなされていない．本研究では，サイズの小さなグラフに対して，重複を除いた選好リストを効率的に列挙し，ポピュラーマッチングの最大数と最大であるときのペア数の内訳を求める．

## 2.　準備

2 部グラフ $G = (A \cup B, E)$ で，各頂点 $x$ は隣接する頂点集合 $N(x)$ 上に厳密な選好順をもつとする．2 つの頂点 $y_1, y_2 \in N(x)$ に対して，$x$ の選好順で $y_1$ を $y_2$ よりも好むとき $y_1 \succ_x y_2$ と表す．各頂点の選好順を集めたリストを選好リスト $P$ とし，グラフ $G$ と選好リスト $P$ のペア $(G, P)$ を入力とする．

$G$ 上のマッチング $M$ に対して，頂点 $x$ の $M$ でのパートナーの頂点を $M(x)$ と表す．ただし，$x$ が $M$ でマッチしていないとき $M(x) = \emptyset$ とする．$(G, P)$ 上の 2 つのマッチング $M$, $M'$ に対し，$M(a) \succ_a M'(a)$ が成り立つとき，頂点 $a$ は $M$ を $M'$ より好むという．ただし，$M(a) \neq \emptyset$ に対して，$M(a) \succ_a \emptyset$ とする．$M$ を $M'$ より好む頂点の総数を $\phi(M, M')$ で表す．このとき，ポピュラーマッチングは以下のように定義される．

**定義 1** ([1]). $(G, P)$ 上のマッチング $M$ が，任意のマッチング $M'$ に対して，

$$\phi(M, M') \geq \phi(M', M)$$

を満たすとき，$M$ を**ポピュラーマッチング**という．

頂点 $x$ と同じ隣接リストをもつ頂点の集合を $D(x) = \{x' | N(x') = N(x)\}$ と表す．$|D(y_1)| \geq 2$ を満たす任意の頂点 $y_1 \in A \cup B$ と $x_1 \in N(y_1)$ について，$D(y_1)$ 上で $\prec_{x_1}$ を固定した選好リスト $P$ の集合を $\mathcal{P}(y_1)$ とする．任意の $G$ 上の選好リストは $D(y_1)$ 上の置換により，$\mathcal{P}(y_1)$ に属する選好リストに対応づけられる．このような置換が存在する選好リストを重複とし，重複するリストが存在しないよう選好リストを削除した選好リストの集合を，**選好パターン**とよぶ．以降，扱う選好リストは，この選好パターンに含まれるものとする．

## 3.　ポピュラーマッチングの最大数

### 3.1.　選好順の効率的な列挙のための性質

$(G, P)$ 上のポピュラーマッチングの集合を，$\mathcal{M}(G, P)$ と表す．次の命題は，$G$ 上のある辺がどのポピュラーマッチングにも含まれないとき，その辺を削除したグラフ上でもポピュラーマッチングはポピュラーのままであることを示している．

**命題 2.** 任意の辺 $e = E(G)$ に対し，$G' = G - e$，選好リスト $P$ を $G'$ に制限したものを $P'$ とする．マッチング $M$ について $e \notin M$ が成り立つとき，

$$M \in \mathcal{M}(G, P) \Rightarrow M \in \mathcal{M}(G', P')$$

が成り立つ．□

辺の削除や追加によってポピュラーマッチングの集合が変化しないならば，最大数を求めるために，それらの辺を除いたグラフのみを考えればよい．次の命題は，ポピュラーマッチングに含まれない辺であり，かつその辺を削除する前後でポピュラーマッチングの集合が変化しないような辺の条件を与えている．

**命題 3.** 辺 $e = (a, b) \in E$ に対して次の条件を満たす頂点 $a_1, b_1$ が存在するとする．

- $a_1$ は $b$ を，$b_1$ は $a$ を最も好む．
- $a_1 \succ_b a$, $b_1 \succ_a b$.

このとき，$G' = G - e$ と選好リスト $P$ を $G'$ で制限した $P'$ に対して，

1. $\forall M \in \mathcal{M}(G,P), e \notin M$
2. $\mathcal{M}(G,P) = \mathcal{M}(G',P')$. □

加えて，同じ隣接集合をもつ頂点に注目し，命題2と同様に，ポピュラーマッチングに含まれない辺であり，かつその辺を削除する前後でポピュラーマッチングの集合が変化しないような辺の条件を以下で与える．頂点集合 $D$ 上に制限した $x$ の選好順における頂点 $y \in N(x) \cap D$ の順位を $\rho_{x|D}(y) = |\{y\} \cup \{y' \in N(x) \cap D \mid y' \succ_x y\}|$ で表す．任意の頂点 $x$ に対し，以下を定める．

$$E(x) = \{(x,y) \in E \mid |D(y)| > |N(y)|, \\ \rho_{x|D(y)}(y) > |D(y)| - |N(y)|\}$$

**命題 4.** 任意の頂点 $x$ に対して，*2* 部グラフで頂点 $x$ を含む頂点集合の頂点数が *3* 以下，あるいは，頂点 $x$ を含まない頂点集合の頂点数が *4* 以下のとき，$G' = G \setminus E(x), P'$ を選好リスト $P$ を $G'$ で制限した選好リストとすると，

$$\mathcal{M}(G,P) = \mathcal{M}(G',P').$$

が成り立つ． □

### 3.2. 列挙による手法

頂点数 $n_A = |A|, n_B = |B|$ を与えたときの入力 $(G,P)$ でのポピュラーマッチングの最大数を求める．そのために，グラフのリストを作成する．ただし，グラフは連結なものとし，同型なグラフが存在しないリストを作成する．さらに，命題4の条件を満たすとき，$E(x)$ が存在するグラフをリストから削除する．

次に，作成したリストに含まれる各グラフに対して，選好リストを与える．グラフ $G$ と選好リスト $P$ に対し，命題3の条件を満たす辺が存在する場合には $G$ ではないグラフで探索を行っているため，選好リスト $P$ を削除する．このようにして作成した削除後の入力 $(G,P)$ の総数を表1に示す．

表 1: 探索が必要な選好パターンの総数

| $\|A\| \times \|B\|$ | 削除後 |
|---|---|
| $2 \times 3$ | 23 |
| $3 \times 3$ | 3,494 |
| $3 \times 4$ | 127,477 |
| $3 \times 5$ | 8,435,904 |
| $4 \times 4$ | 337,426,705 |

その後，各グラフと選好パターンについて，マッチングを列挙し，その中からポピュラーマッチングを出力する．与えられたマッチングがポピュラーマッチングかどうかの判定には，[3] で示されたアルゴリズムを用いる．

### 3.3. 結果

ポピュラーマッチングの最大数 (PM) を表2に示す．表2では，安定マッチングの最大数 (SM) も併記している．

表 2: ポピュラーマッチングの最大数

| $\|A\| \times \|B\|$ | (SM) の最大数 | (PM) の最大数 | (PM) の最大数となる選好リスト数 |
|---|---|---|---|
| $2 \times 3$ | 2 | 2 | 2 |
| $3 \times 3$ | 3 | 4 | 175 |
| $3 \times 4$ | 3 | 4 | 128 |
| $3 \times 5$ | 3 | 4 | 331 |
| $4 \times 4$ | 10 | 12 | 33 |

$3 \times 3$，$4 \times 4$ のグラフでポピュラーマッチングの個数が最大となるときの，各ポピュラーマッチングの辺数の内訳を表3，4に示す．

表 3: 個数最大のポピュラーマッチング $(3 \times 3)$

| 辺数3 | 辺数2 | 個数 |
|---|---|---|
| 4 | 0 | 156 |
| 3 | 1 | 16 |
| 2 | 2 | 3 |
| | 計 | 175 |

表 4: 個数最大のポピュラーマッチング $(4 \times 4)$

| 辺数4 | 辺数3 | 辺数2 | 個数 |
|---|---|---|---|
| 12 | 0 | 0 | 33 |
| | | 計 | 33 |

### 参考文献

[1] Abraham, D.J., Irving, R.W., Kavitha, T., Mehlhorn, K.: Popular matchings. SIAM Journal on Computing 37, 1030–1045, 2007.

[2] Faenza, Y., Kavitha, T., Powers, V., and Zhang, X.: Popular matchings and limits to tractability. In Proceedings of the Thirtieth Annual ACM SIAM Symposium on Discrete Algorithms , 2790–2809, SIAM, 2019.

[3] Huang, C.-C., Kavitha, T.: Popular matchings in the stable marriage problem. Information and Computation 222, 180–194, 2013.