日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

不完備情報協力ゲームの近似 Shapley 値

01607314　大東文化大学　*桝屋　聡　MASUYA Satoshi

1.　はじめに

協力ゲーム理論は，協力して事業などを実施した場合の各プレイヤーの費用分担額や利益配分額，投票における影響力などの合理的な評価を行う際に有用となる．協力ゲームは，プレイヤー全体の集合とその部分集合に対して実数値を与える関数によって表現される．この関数は特性関数，プレイヤーの部分集合は提携と呼ばれ，関数値は提携値と呼ばれる．プレイヤー全員の集合は全体提携と呼ばれる．プレイヤーの数を n とすると，協力ゲームの解は，n 次元実数ベクトルか，あるいは，その集合として与えられる．

通常の協力ゲーム理論では，すべての提携の提携値がわかっていると仮定されている．しかし，現実にはプレイヤーの数が多い場合など，すべての提携値を測定することが非常に困難で，結果的にいくらかの提携に対する提携値がわかっていないことが少なくない．このように不完備な特性関数をもつ協力ゲームはほとんど研究されていなかった．近年，桝屋・乾口 [2] によって，一部の提携値のみがわかっている不完備な特性関数をもつ協力ゲームとその解について検討され始めた．また，Albizuri et al.[1] では，Harsanyi のアプローチを用いた Shapley 値の提案がなされ，その公理化がなされている．

これらの研究では，提携値情報が不完備な協力ゲームに対して厳密な Shapley 値を考察しており，提携値情報が不完備な協力ゲームに対する Shapley 値であっても，その計算には膨大な時間がかかる可能性がある．

そこで，本研究では上記で提案された解よりも計算時間を大きく減らすことが可能な近似 Shapley 値の考察を行う．簡単のため，以下では，いくつかの提携値がわかっていない協力ゲームを “不完備ゲーム” と呼び，すべての提携値がわかっている協力ゲーム，すなわち，通常の協力ゲームを “ 完備ゲーム” と呼ぶことにする．

2.　不完備ゲームと近似 Shapley 値

プレイヤーの集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$ とし，$v\in\mathbf{R}^{2^N}$ とすると，Shapley 値 $Sh:\mathbf{R}^{2^N}\to\mathbf{R}^n$ は以下のように定義される．

$$Sh_i(v)=\sum_{\substack{S\ni i\\ S\subseteq N}}\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S)-v(S\backslash i)), \tag{1}$$

for all $i\in N$.

不完備ゲームは，プレイヤーの集合を $N=\{1,2,\ldots,n\}$，提携値がわかっている提携の集合を $\mathcal{K}\subseteq 2^N$，関数 $v:\mathcal{K}\to\mathbf{R}$ によって特徴づけることができる．すなわち，不完備ゲームは 3 重対 $(N,\mathcal{K},v)$ によって定められる．ただし，$\emptyset\in\mathcal{K}$ とし，$v(\emptyset)=0$ と仮定する．また，全体提携に対する提携値は必ずわかっているものと仮定する．すなわち，$N\in\mathcal{K}$ が成り立つものと仮定する．$\mathcal{K}$ における全ての不完備ゲームの集合を $\Gamma^{\mathcal{K}}$ と記す．

次に，各プレイヤーのもつイデオロギーの近さの観点から，各プレイヤーの行動履歴などを用いて因子分析やクラスタリングを行い，全プレイヤーをいくつかのグループにわけることを考える．同じグループに属する全プレイヤーは，1 人のプレイヤーのように行動すると考える．つまり，全プレイヤーをいくつかのグループに分け，各グループを 1 人のプレイヤーと見ることで，測定する提携値を減らそうという考え方である．クラスタリングなどから得られたグループの集合を $\mathcal{T}=\{T_1,\ldots,T_m\}$ とする．m はグループの数であり，$M=\{1,\ldots,m\}$ とする．この各 $T_k(k=1,\ldots,m)$ を対称集合と呼ぶことにする．対称集合の全体のべき集合を既知提携の全体とする．つまり，$\mathcal{K}=2^{\mathcal{T}}$ とする．つまり，この不完備ゲームは $(N,2^{\mathcal{T}},v)$ と表される．このような形式で表される不完備ゲームの全体を，$\tilde{\Gamma}$ と記す．

次に，$\mathcal{T}$ から得られる順列について考える．$\Pi(\mathcal{T})$ を $\mathcal{T}$ から得られる順列の全体とし，$\pi\in\Pi(\mathcal{T})$ とする．各 $T_k(k=1,\ldots,m)$ に属するプレイヤーも順列を構成するので，$\Pi(T_k)$ を T_k から得

られる順列の全体とし，$\sigma \in \Pi(T_k)$ とする．さらに，$S_i^{(\pi,\sigma)}$ を，順列 π と σ の下で構成される，プレイヤー i を含めた先行者の集合としよう．

このとき，近似 Shapley 値 $\gamma : \tilde{\Gamma} \to \mathbf{R}^n$ を以下のように定義する．

$$\gamma_i(v) = \frac{1}{m!|T_k|!} \sum_{\pi \in \Pi(\mathcal{T})} \sum_{\sigma \in \Pi(T_k)} [v(S_i^{(\pi,\sigma)}) - v(S_i^{(\pi,\sigma)} \setminus i)],$$

for all $i \in T_k$ and for all $k \in M$. $\gamma_i(v)$ は，各対称集合が，順列を等確率で形成するときのプレイヤー i の限界貢献度の期待値である．$\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ のとき，$\gamma_i(v)$ は通常の Shapley 値となる．.

次の定理を得る．

Theorem 1 不完備ゲーム $(N, 2^{\mathcal{T}}, v)$ が与えられたとき, 以下が成り立つ:

$$\gamma_i(v) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \Pi(\mathcal{T})} \frac{v(S^{\pi}_{T_k}) - v(S^{\pi}_{T_k} \setminus T_k)}{|T_k|}, \quad (2)$$

for all $i \in T_k$ *and for all* $k \in M$. ここで，$S^{\pi}_{T_k}$ は，順列 π のもとで，T_k を含めた T_k の先行者の全体を表す.

Theorem 1 より，近似 Shapley 値は対称集合が 1 人のプレイヤーとして行動すると考えるときに，各対称集合が得る Shapley 値の 1 人当たりの平均となっている．また，提携値を測定しなければならない提携の数は 2^m であるが，通常の Shapley 値では 2^n である．

3. 近似 Shapley 値の公理系からの導出

以下では，近似 Shapley 値 γ の公理系からの導出を行う．公理系は効率性，対称性， Balanced contributions per capita の 3 つの公理から構成される．$\sigma : \tilde{\Gamma} \to \mathbf{R}^n$ とする．

Axiom 1 (効率性) $v \in \tilde{\Gamma}$ とすると，以下が成立する．

$$\sum_{i \in N} \sigma_i(v) = v(N). \quad (3)$$

Axiom 2 (対称性) $v \in \tilde{\Gamma}$ とし，*2* 人のプレイヤー $i, j \in N$ をとる．また，任意の提携 $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ について既知提携 $S \cup i \in \mathcal{K}$, $S \cup j \in \mathcal{K}$ をとり，$v(S \cup i) = v(S \cup j)$ とする．このとき，以下が成立する．

$$\sigma_i(v) = \sigma_j(v). \quad (4)$$

Axiom 3 をあたえる前に，部分不完備ゲームの定義を行う．

Definition 1 (部分不完備ゲーム) $(N, \mathcal{T}, v) \in \tilde{\Gamma}$, $T \in \mathcal{T}$ とする． このとき，不完備ゲーム $(N, \mathcal{T}, v)$ の部分不完備ゲーム $(N \setminus T, \mathcal{T} \setminus T, v^{N \setminus T})$ は以下のように表される:

$$v^{N \setminus T}(S) = v(S), \ \forall S \in 2^{\mathcal{T} \setminus T}. \quad (5)$$

Axiom 3 (Balanced contributions per capita) $(N, \mathcal{T}, v) \in \tilde{\Gamma}$ とし， $T_k, T_l \in \mathcal{T}$ $(k \neq l)$ とする．このとき，$i \in T_k$, $j \in T_l$ であるような *2* 人のプレイヤー $i, j \in N$ をとる．このとき，以下が成立する．

$$\frac{1}{|T_l|}(\sigma_i(N, \mathcal{T}, v) - \sigma_i(N \setminus T_l, \mathcal{T} \setminus T_l, v^{N \setminus T_l}))$$
$$= \frac{1}{|T_k|}(\sigma_j(N, \mathcal{T}, v) - \sigma_j(N \setminus T_k, \mathcal{T} \setminus T_k, v^{N \setminus T_k}))$$

Axiom 3 は各プレイヤーが属している各提携が既知提携から削除されたとき，削除された提携に属していたそれぞれのプレイヤーの 1 人当たりの配分利得の差は等しいことを意味している．$|T_k| = |T_l| = 1$ のとき，Axiom 3 は通常の Balanced cotributions axiom となり，これは通常の Shap l ey 値の 1 つの公理となることが知られている．

このとき，次の定理を得た.

Theorem 2 近似 *Shapley* 値 γ は，*Axiom 1* から *3*を満たす唯一の$\tilde{\Gamma}$ 上の関数である．

参考文献

[1] Albizuri, M. J., Masuya, S. and Zarzuelo, J.M: Characterization of a value for games under restricted cooperation, **Annals of Operations Research**, 2022. doi : https://doi.org/10.1007/s10479-022-04768-3.

[2] 桝屋・乾口: 不完備情報の下での協力ゲームの基礎的考察, **知能と情報**, 24:601-615, 2012.