提携に重複を許した提携形ゲームにおける仲裁コアの非空性

電気通信大学 *吉澤駿暉 YOSHIZAWA Toshiaki
01015413 電気通信大学 岡本吉央 OKAMOTO Yoshio

1. はじめに

Chalkiadakis らによって提案された Overlapping Coalition Formation (OCF) ゲームは提携形ゲームの一般化であり、エージェントが複数提携にリソースを分割して参加できるモデルである [1]。

提携形ゲームと同様に、解の安定性は重要となる。古典的な協力ゲームでは、利得の配分に不満を持つエージェント集合 S は S のみで得られる利得と現在の配分を比較する一方で、OCF ゲームではリソースの一部のみを引き上げることが可能であるため、提携構造から逸脱した際に元々参加していた提携から利得が分配されることが考えられる。逸脱への対応は仲裁関数と呼ばれる関数で定義され、S が得る利得の大きさは仲裁関数に基づき決定される。

OCF ゲームの解概念として、仲裁コアが存在する。これは仲裁関数によって決定される安定な解の集合で、いくつかの自然な仲裁関数に対する仲裁コアはその非空性の特徴づけが行われている [2]。逸脱したエージェントに対して最も多く利得を分配する仲裁関数である楽観的な (optimistic) 仲裁関数に対応する仲裁コアである o-コアについては、非空性の特徴づけはなされていない。

本研究では、線形半無限計画問題の双対性を用いて、o-コアが非空となる条件を与えた。また、さらなる仮定の下で、線形計画問題の双対性を用いてこの非空性の特徴づけを与えた。

2. 準備

$N = \{1, \dots, n\}$ をエージェントの集合とする。ベクトル $c = (c^1, c^2, \dots, c^n)$ を提携という。c^i はエージェント i が提携 c に出したリソースの割合であり、$c^i \in [0, 1]$ である。$c^i = 0$ はエージェント i が提携 c に参加していないことを示し、提携 c に参加しているエージェントの集合を、$supp(c) = \{i \in N \mid c^i \neq 0\}$ で表す。$\mathbb{R}_+$ を非負実数の集合とし、c の集合 $[0, 1]^n$ 上での $v(0^n) = 0$ を満たす実数値関数 $v\colon [0, 1]^n \to \mathbb{R}_+$ を特性関数という。エージェントの集合 N と特性関数 v の組 (N, v) を Overlapping Coalition Formation (OCF) ゲームといい、$G = (N, v)$ と表す。

$S \subseteq N$ 上の提携構造とは、

1. $c_j \in [0, 1]^n$
2. 全ての $j \in 1, \dots, m$ について $supp(c_j) \subseteq S$
3. 全ての $i \in S$ について $\sum_{i=1}^{m} c_j^i \geq 1$

を満たす提携の有限な集合 $CS_S = \{c_1, \dots, c_m\}$ である。m を CS_S のサイズという。提携構造 CS の利得は $v(CS) = \sum_{c \in CS} v(c)$ で与えられる。

各エージェントのリソースを並べたベクトル $w \in [0, 1]^n$ に対し、$v^*(w) = \sup\{v(CS) \mid \sum_{c_j \in CS} c_j \leq w\}$ は総利得の上限を与える。$S \subseteq N$ に対し、i 番目の要素が $i \in S$ ならば 1、$i \notin S$ ならば 0 であるベクトルを e^S とすると、$v^*(e^N)$ は G における $v(CS)$ の上限を与える。

全ての $w \in [0, 1]^n$ で $\sum_{c_j \in CS} c_j = w$ かつ $v^*(w) = v(CS)$ を満たす提携構造 CS が存在するとき特性関数 v が効率的提携構造特性を持つという。

各提携の利得はエージェントの間で分割される。提携構造 $CS = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ に対する配分とは、

個人合理性 $\sum_{j=1}^{m} x_j^i \geq v^*(e^{\{i\}})$

利得分配 任意の $c_j \in CS$ で $\sum_{i=1}^{n} x_j^i \leq v(c_j)$

を満たすベクトルの集合 $x = (x_1, \dots, x_m)$ である。x_j^i はエージェント i が提携 c_j から分配された利得の量を表す。提携構造 CS とその配分 x の組 (CS, x) が許容解となる。(CS, x) において、エージェント $i \in N$ の利得を $p^i(CS, x) = \sum_{j=1}^{m} x_j^i$、$S \subseteq N$ の総利得を $p^S(CS, x) = \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{m} x_j^i$ と表す。また、提携構造 CS 内のリソースの総量を $w(CS) = \sum_{c_j \in CS} c_j$ で表す。

提携構造 CS の提携のうち、$S \subseteq N$ のメンバーのみにより構成される提携の集合を $CS|_S = \{c \in CS \mid supp(c) \subseteq S\}$ と定義する。$CS \setminus CS|_S = (c_{j1}, \dots, c_{jk})$ とし、提携構造 $CS' = \{d_1, \dots, d_k\}$ が任意の $l \in \{1, \dots, k\}$ で $d_l \leq c_{jl}$ および $d_l \leq e^S$ を満たすとき、CS' は S の CS からの逸脱であるという。S の c_{jl} からの逸脱に対応する $d_l \in CS'$

を $d(c_{jl})$ と表記する。全ての S の CS からの逸脱の集合を $CS_D(CS,S)$ とする。

逸脱をしたエージェントの、逸脱をしていないエージェントとの提携からの利得の配分は仲裁関数を用いて定義される。(CS,x)、エージェントの部分集合 $S \subseteq N$、S の CS からの逸脱 CS' が与えられたとき、仲裁関数 A は各提携 $c \in CS \backslash CS|_S$ に実数値 $\alpha_c(CS,x,S,CS')$ を割り当てる写像である。

楽観的な (optimistic) 仲裁関数 A_o のもとでは、非逸脱者への利得の配分が逸脱前と変わらない限り逸脱したエージェントに利得を差し出す。これは逸脱した S に対して最も多くの利得を分配する仲裁関数であり、$\alpha_c(CS,x,S,CS') = \max\{0, v(c_j - d_j) - \sum_{i \in N \backslash S} x_j^i\}$ となる。S の逸脱による総利得の上限は、$CS|_S \subseteq \widehat{CS} \subseteq CS$ を満たす提携構造 $\widehat{CS}$ および S の $CS \setminus \widehat{CS}$ からの逸脱 CS' により $\sup\{v^*(w^S(\widehat{CS}) + w(CS')) + \sum_{c \in CS \backslash \widehat{CS}} \alpha_c(CS,x,S,CS')\}$ となる。

逸脱の有益性は、各エージェントが逸脱前よりも多くの利得を分配されているかどうかによって判断される。(CS,x)、$S \subseteq N$、S の CS からの逸脱 CS' が与えられたとき、$w(CS_d) = w(CS|_S) + W(CS')$ を満たす提携構造 CS_d とその配分 x_d が存在して、

1. $\alpha_{c_j}(CS,x,S,CS') \geq 0$ ならば $y_j \in \mathbb{R}^n_+$、そうでないならば $y_j \in \mathbb{R}^n_-$
2. $i \notin (S \cap supp(c - d(c)))$ ならば $y_j^i = 0$
3. $\sum_{i=1}^n y_j^i = \alpha_{c_j}(CS,x,S,CS')$

となり、全ての $i \in S$ で $p^i(CS_d,x_d) + \sum_{c_j \in CS \backslash CS|_S} y_j^i > p^i(CS,x)$ を満たすとき CS' は S の (CS,x) からの A-有益な逸脱であるという。A-有益な逸脱では各エージェント $i \in S$ は逸脱前より多くの利得を得ている。OCF ゲーム $G = (N,v)$ と仲裁関数 A が与えられたとき、どの $S \subseteq N$ も (CS,x) からの A-有益な逸脱を持たない (CS,x) を A-安定であるといい、A-安定な (CS,x) 全ての集合を仲裁コア $C(G,A)$ という。

3. 結果

$S \subseteq N, CS|_S \subseteq \widehat{CS} \subseteq CS, CS' \in CS_D(CS \setminus \widehat{CS}, S)$ を満たす全ての $(S,\widehat{CS},CS')$ の集合を J と記述する。また、$M(S,\widehat{CS},CS') = v^*(w^S(\widehat{CS}) + w(CS')) + \sum_{c \in CS \backslash \widehat{CS}} (v(c - d(c))) - v(CS \setminus \widehat{CS})$、$M^*(S,\widehat{CS}) = \max\{M(S,\widehat{CS},CS') \mid CS' \in CS_D(CS \setminus \widehat{CS}, S)\}$ とする。

仲裁コア $C(G,A_o)$ の非空性について、線形半無限計画問題の双対性より以下の条件を得た。

定理 1. OCF ゲーム $G = (N,v)$ および楽観的な仲裁関数 A_o が与えられた際に、$v(CS) = v^*(e^N)$ かつ全ての $i \in \{1,\ldots,n\}$ で $CS\ |_{\{i\}} = \emptyset$ を満たす提携構造 CS が存在して、全ての $c_j \in CS$、$i \in supp(c_j)$ で $r_j + \sum_{(S,\widehat{CS},CS') \in J} \delta_{S,\widehat{CS},CS'} = 1$ を満たす非負の重みの集合 $\{(r_j)_{j=1}^m; (\delta_{S,\widehat{CS},CS'})_{(S,\widehat{CS},CS') \in J}\}$ が存在して、かつ

$$\sum_{j=1}^m r_j v(c_j) + \sum_{(S,\widehat{CS},CS') \in J} \delta_{S,\widehat{CS},CS'} M(S,\widehat{CS},CS') \leq v^*(e^N)$$

を満たすとき仲裁コア $C(G,A_o)$ は非空である。

また、線形計画問題の双対性より以下の特徴づけを得た。

定理 2. 特性関数 v が連続で効率的提携構造特性を持ち、提携構造に含まれる提携の数が M 個以下であるとする。OCF ゲーム $G = (N,v)$ および楽観的な仲裁関数 A_o が与えられた際に、$v(CS) = v^*(e^N)$ を満たす提携構造 CS が存在して、すべての $c_j \in CS$、$i \in supp(c_j)$ で $r_j + \sum_{\forall S \subseteq N, CS|_S \subseteq \forall \widehat{CS} \subseteq CS} \delta_{S,\widehat{CS}} = 1$ を満たす $\{(r_j)_{j=1}^m; (\delta_{S,\widehat{CS}})_{S \subseteq N, CS|_S \subseteq \widehat{CS} \subseteq CS}\}$ が存在して、かつ

$$\sum_{j=1}^m r_j v(c_j) + \sum_{S \subseteq N, CS|_S \subseteq \widehat{CS} \subseteq CS} \delta_{S,\widehat{CS}} M^*(S,\widehat{CS}) \leq v^*(e^N)$$

を満たすときかつそのときに限り仲裁コア $C(G,A_o)$ は非空である。

参考文献

[1] Chalkiadakis, G., Elkind, E., Markakis, E., Polukarov, M., & Jennings, N. R. (2010). Cooperative Games with Overlapping Coalitions. Journal of Artificial Intelligence Research, 39, pp. 179-216.

[2] Zick, Y., Markakis, E., & Elkind, E. (2014). Arbitration and stability in cooperative games with overlapping coalitions. Journal of Artificial Intelligence Research, 50, 847-884.