日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

2 つの零点定理と n 次元中間値の定理

01106246　九州大学　*川崎英文　KAWASAKI Hidefumi

1.　はじめに

本発表では 2 つの零点定理，Poincaré-Miranda の定理 [6, 5] と Hadamard の定理 [1] を考察する．

定理 1（Poincaré-Miranda の定理）区間 $I = [-1,1]^n$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像 $g = (g_1, \ldots, g_n)$ が次の境界条件を満たすならば，g は零点をもつ．

$$\begin{aligned} &g_i(x) \le 0 \text{ on } \{x \in I \mid x_i = -1\}, \\ &g_i(x) \ge 0 \text{ on } \{x \in I \mid x_i = 1\} \end{aligned} \tag{1}$$

定理 2（Hadamard の定理）中心が原点の単位球 $B \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像 g が境界条件

$$x^T g(x) \ge 0 \ (\forall x \in \partial B) \tag{2}$$

を満たすならば，g は零点をもつ．

筆者は Poincaré-Miranda の定理を用いて n 次元中間値の定理を与え，ゲーム理論への応用を図った [2]．また，Hadamard の零点定理を集合値写像に拡張し，凸解析に応用した [3]．本発表では Hadamard の定理を [3] とは違う方法で拡張し，2 つの零点定理をまとめて記述できることを示す．さらに，Hadamard の定理の拡張を用いて n 次元中間値の定理を考察する．

2.　Hadamard の定理

Hadamard の定理において単位球を内部が非空な有界閉凸集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ に容易に拡張できる．

定理 3（[3]）a を C の内点として，連続写像 $g : C \to \mathbb{R}^n$ が境界条件

$$(x-a)^T g(x) \ge 0 \quad (\forall x \in \partial C) \tag{3}$$

を満たすならば，g は零点をもつ．

境界条件 (3) は内点 a に依存するため，それを次のように修正する．

$$n^T g(x) \ge 0 \quad (\forall n \in N_C(x),\ \forall x \in \partial C). \tag{4}$$

ここで，$N_C(x)$ は $x \in C$ における C の法錐 $N_C(x) = \{n \in \mathbb{R}^n \mid n^T(y-x) \le 0 \ (\forall y \in C)\}$ である．

$I = [-1,1]^n$ の境界における法錐は凸包

$$N_I(x) = \mathrm{conv}\{\mathrm{sign}(x_i)e_i \mid |x_i| = 1\}$$

なので，(4) は (1) になる．

また，単位球 B の境界における法錐は

$$N_B(x) = \{\lambda x \mid \lambda \ge 0\}$$

なので，(4) は (2) になる．このように，境界条件 (4) を用いて 2 つの零点定理を記述できる．

定理 4 $C \subset \mathbb{R}^n$ を内部が非空な有界閉凸集合とする．連続写像 $g : C \to \mathbb{R}^n$ が境界条件 (4) を満たすならば，g は零点をもつ．さらに，(4) を狭義の不等式で満たすならば，零点は C の内点である．

3.　n 次元中間値の定理

零点定理から中間値の定理を導くには，$\gamma \in \mathbb{R}^n$ に対し $g(x) = \gamma - f(x)$ あるいは $g(x) = f(x) - \gamma$ をとり，境界条件を翻訳すればよい．

[2] では，Poincaré-Miranda の定理を用いて次の n 次元中間値の定理を与えた．$I := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ として，$f : I \to \mathbb{R}^n$ を連続写像とする．

定理 5（[2]）$i = 1, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_i &:= \max\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\}, \\ \overline{\beta}_i &:= \max\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\}, \\ \underline{\alpha}_i &:= \min\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = a_i\}, \\ \underline{\beta}_i &:= \min\{f_i(x) \mid x \in I,\ x_i = b_i\}. \end{aligned}$$

とおく．このとき，$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ が

$$\min\{\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_i\} \le \gamma_i \le \max\{\underline{\alpha}_i, \underline{\beta}_i\} \ (\forall i) \tag{5}$$

を満たすならば，$f(c) = \gamma$ なる $c \in I$ が存在する．

では，定理 4 を用いると，どのような中間値の定理が得られるだろうか．$g(x) = f(x) - \gamma$ をとると，点 $x \in \partial C$ における境界条件 (4) は

$$n^T(\gamma - f(x)) \le 0 \quad (\forall n \in N_C(x)) \tag{6}$$

であり，これは $\gamma - f(x)$ が $N_C(x)$ の極錐 $N_C^\circ(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid n^T z \leq 0 \ (\forall n \in N_C(x))\}$ の元であることを意味する．法錐の極錐は接錐 $T_C(x) = \mathrm{cl}\,\mathrm{cone}(C - x)$ なので，次の定理が得られる．

定理 6 f を内部が非空な有界閉凸集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への連続写像とするとき，$\gamma \in \mathbb{R}^n$ が

$$\gamma - f(x) \in T_C(x) \quad (\forall x \in \partial C) \tag{7}$$

を満たすならば，$f(c) = \gamma$ なる $c \in C$ が存在する．

$C = B$ の場合，(6) は

$$x^T(\gamma - f(x)) \leq 0 \quad (\forall x \in \partial B) \tag{8}$$

となる．そこで，正斉次関数 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f_0(x) := \begin{cases} f(\frac{x}{|||x|||})^T x & (x \neq \mathbf{0}) \\ 0 & (x = \mathbf{0}) \end{cases} \tag{9}$$

で定義し，f_0^* をその共役関数とする．

系 1 $C = B$ の場合，$\gamma \in \mathbb{R}^n$ が $f_0^*(\gamma) \leq 0$ を満たすならば，$f(c) = \gamma$ なる $c \in B$ が存在する．

4. 「中間値」の意味

条件 (5) から，定理 5 を中間値の定理とよぶのは自然である（図 1, 図 2）．一方，(6) や (7), (8) からは「中間値」の意味が分かりにくい．この点についても発表では触れたい．

5. 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP16K05278 の助成を受けている．

参考文献

[1] J. Hadamard, Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, in J. Tannery, ed. Introduction a la Théorie des Fonctions d'Une Variable. Vol. 2, 2nd edn., Paris: Hermann, (1910) 437–477.

[2] H. Kawasaki, An n-dimensional intermediate value theorem and its application to the game theory, Linear and Nonlinear Analysis, **8**, No.1, (2022) 81–87.

[3] 川崎英文，零点定理の凸解析とゲーム理論への応用，数理解析研究所講究録「田村慶信，確率的環境下での数理的意思決定とその周辺」に掲載予定．

[4] J. Mawhin, Simple Proofs of the Haramard and Poincaré-Miranda Theorems Using the Brouwer Fixed Point Theorem, *The American Mathematical Monthly*, **126**, 3, (2019) 260-263.

[5] C. Miranda, Un' osservatione su un theorema di Brouwer *Boll. Unione Mat. Ital.*, **3**, (1940) 5–7.

[6] H. Poincaré, Sur certaines solutions particuliéres du probléme des trois corps. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **97**, (1883) 251–252.

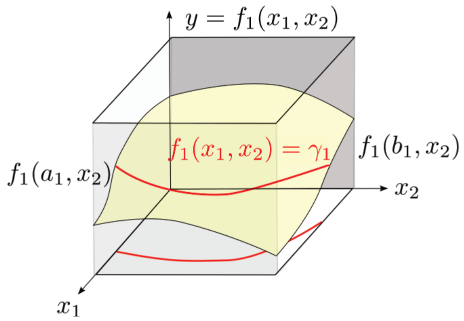

図 1: 等高線 $\{x \mid f_1(x) = \gamma_1\}$.

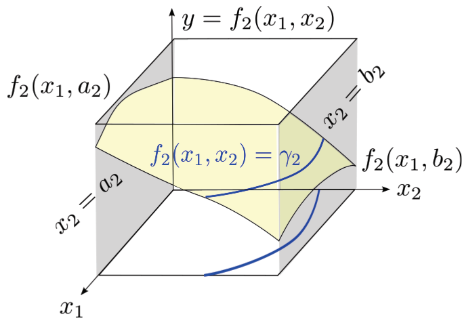

図 2: 等高線 $\{x \mid f_2(x) = \gamma_2\}$.