# 上下限制約付き最適化問題に対する 有効制約ブロックBarzilai-Borwein法

05000392 電気通信大学 中山 舜民 NAKAYAMA Shummin

## 1. はじめに

本稿では，以下の最小化問題について考える．

$$\left|\begin{array}{l}\min_{x\in K} f(x),\\ K=\{x\in\mathbb{R}^n \mid l_i\le x_i\le u_i,\ i=1,\ldots,n\}.\end{array}\right. \tag{1}$$

ここで，$l\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^n$ とし，目的関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は連続的微分可能な関数とする．また，任意のベクトル $v\in\mathbb{R}^n$ に対して，$v_i$ は $v$ の第 $i$ 成分を意味することとする．ここで，$\bar{x}$ が $l_i=\bar{x}_i$ なる $i$ に対して $\nabla f_i(\bar{x})\ge 0$，$u_i=\bar{x}_i$ なる $i$ に対して $\nabla f_i(\bar{x})\le 0$，そのほかの $i$ に対しては $\nabla f_i(\bar{x})=0$ をみたすとき，$\bar{x}$ を問題 (1) の停留点と呼ぶ．

問題 (1) を解くための反復法は，任意の初期点 $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$ から出発して，反復式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\eta^{(k)}d^{(k)} \tag{2}$$

により点列を更新する．ただし，$d^{(k)}\in\mathbb{R}^n$ は探索方向，$\eta^{(k)}>0$ はステップ幅とする．以降では，$\nabla f(x^{(k)})$ を $g^{(k)}$ と表記することとする．

上下限制約付き最適化問題 (1) を解くめのアルゴリズムとして，Facchinei et al. [1] はニュートン法に基づいた有効制約法を提案した．この方法は効いている制約のみを考え，次元を縮約し，その次元でのニュートン法を適用している．縮約してもなお規模が大きい問題の場合にはニュートン法を適用することが困難である．Xiao and Hu [2] は大規模な問題に対して Barzilai-Borwein (BB) 法に基づいた有効制約法を提案した．BB 法は最急降下法の探索方向にある種のスケーリングを施した方法ではある．実際の問題は各要素に対応する問題の性質が異なることが多々あり，全ての要素に対して同じスケーリングを施す BB 法は得策であるかどうかはわからない．そこで本研究では要素をブロック分割し，分割した要素毎に BB 法を適用する有効制約ブロック BB 法を提案し，大域的収束性を示す．最後に適用例を紹介する．

## 2. 提案手法

本節では有効制約ブロック BB 法を提案する．そのために，ベクトル $x$ を $m$ 個のブロックに分割することを考え，$i$ 番目のブロックを

$$x_{(i)}=(x_{i,1},x_{i,2},\cdots,x_{i,m_i})^T$$

と表記することとする．ここで $m_i$ は $i$ 番目のブロックの要素数を表し，$\sum_{i=1}^m m_i=n$ となることに注意する．

次に，$a,b$ を正の定数として，各ブロック $i$ に対して $L^{k_i}, U^{k_i}, F^{k_i}$ を

$$\left\{\begin{array}{l}L^{k_i}:=\{j: x_{i,j}^{(k)}\le l_{i,j}+ag_{i,j}^{(k)}\},\\ U^{k_i}:=\{j: x_{i,j}^{(k)}\ge u_{i,j}+bg_{i,j}^{(k)}\},\\ F^{k_i}:=\{1,\ldots,m_i\}\backslash(L_{k_i}\cup U_{k_i}),\end{array}\right.$$

で定義する．このとき，提案する探索方向 $d^{(k)}$ の各ブロック $i$ の成分は以下で与えられる．

$$d_{i,j}^{(k)}=\left\{\begin{array}{ll}l_{i,j}-x_{i,j}^{(k)}, & j\in L^{k_i},\\ u_{i,j}-x_{i,j}^{(k)}, & j\in U^{k_i},\\ -\alpha^{k_i}\lambda^{k_i}g_{i,j}^{(k)}, & j\in F^{k_i}.\end{array}\right. \tag{3}$$

ここで，

$$\lambda^{k_i}=\frac{\|x_{(i)}^{(k)}-x_{(i)}^{(k-1)}\|^2}{(x_{(i)}^{(k)}-x_{(i)}^{(k-1)})^T(g_{(i)}^{(k)}-g_{(i)}^{(k-1)})},$$

$$\begin{aligned}\alpha^{k_i}=&\max\{\alpha\mid\alpha\le 1,\\ &l_{i,j}\le x_{i,j}^{(k)}-\alpha\lambda^{k_i}g_{i,j}^{(k)}\le u_{i,j}, j\in F^{k_i}\}\end{aligned}$$

である．ただし，$\lambda^{0_i}=1$ とする．探索方向の定義より，$j\in L^{k_i}$ に対して，$x_{i,j}^{(k)}+d_{i,j}^{(k)}=l_{i,j}$ であり， $j\in U^{k_i}$ に対しては，$x_{i,j}^{(k)}+d_{i,j}^{(k)}=u_{i,j}$ である．$j\in F^{k_i}$ に対しては，$\alpha^{k_i}$ を用いて制約 $K$ に留まる修正をしているが，基本的には $i$ ブロック毎に BB 法を適用している．また，分割しない場

合，すなわち，$m=1$ のときは Xiao and Hu [2] の提案した探索方向に帰着されることに注意する．

提案する有効制約ブロック BB 法のアルゴリズムは以下の通りである．

---

**Algorithm 1**

---

**Require:** $x^{(0)} \in K$, $0 < \beta < 1$, $0 < \sigma < 1$.

1: (3) により探索方向 $d_k$ を計算する．

2: 停止条件を満たすならアルゴリズムを停止する．

3: バックトラッキングにより Armijo 条件

$$f(x^{(k)} + \beta^{-l} d^{(k)}) \le f(x^{(k)}) + \sigma\beta^{-l}(g^{(k)})^T d^{(k)}$$

を満たす最小の非負整数 $l$ を求め，$\eta^{(k)} = \beta^{-l}$ とする．

4: (2) により $x^{(k)}$ を更新する．

5: $k = k+1$ として 1 に戻る．

---

## 3. 提案手法の大域的収束性

本節では，前節で提案したアルゴリズムの大域的収束性を示す．そのために以下の仮定を設ける．

**Assumption 1.** 準位集合 $L^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le f(x^{(0)})\} \cap K$ は有界であり，$f$ の勾配は $L^0$ においてリプシッツ連続である．

**Assumption 2.** 全ての $k_i$ に対して，正の定数 $\lambda_{min}$，$\lambda_{max}$ $(\lambda_{min} < \lambda_{max})$ が存在して

$$\lambda_{min} \le \lambda^{k_i} \le \lambda_{max}$$

が成り立つ．

実際にアルゴリズムを適用する際には

$$\lambda^{k_i} = \min\left\{\lambda_{max}, \max\left\{\lambda_{min}, \frac{\|x_{(i)}^{(k)} - x_{(i)}^{(k-1)}\|^2}{(x_{(i)}^{(k)} - x_{(i)}^{(k-1)})^T (g_{(i)}^{(k)} - g_{(i)}^{(k-1)})}\right\}\right\}$$

とすることで，Assumption 2 を保証することができる．

以下の補題，定理では Assumptions 1–2 が成立すると仮定する．次の補題は探索方向が目的関数に関して降下方向となることを示している．

**Lemma 1.** 全ての $k$ に対して，正の定数 $\mu$ が存在して

$$(g^{(k)})^T d^{(k)} \le -\mu \|d^{(k)}\|^2$$

が成り立つ．ここで，$\|\cdot\|$ はユークリッドノルムである．

次に，停留点に関する必要十分条件を与える．

**Lemma 2.** $x^{(k)}$ が問題 (1) の停留点であるための必要十分条件は $d^{(k)} = 0$ が成り立つことである．

Lemma 2 より $d^{(k)} = 0$ がアルゴリズムの停止条件の一つと考えられる．以上の補題を用いると以下の収束定理が得られる．

**Theorem 1.** Algorithm 1 によって生成される無限点列を $\{x^{(k)}\}$ とする．このとき，点列 $\{x^{(k)}\}$ は少なくとも一つの集積点を持ち，任意の集積点は問題 (1) の停留点である．

## 4. 適用例

制御の分野などでは，上下限制約付き最適化問題 (1) がよく現れる．モデル予測制御 (MPC)[3] においては以下の目的関数

$$\min_{x \in K} \sum_{i=1}^{m} x_{(i)}^T Q_i x_{(i)} + q_i^T x_{(i)} \tag{4}$$

がよく扱われる．ただし，$Q_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ は正定値対称行列であり，$q_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ である $(i = 1, \cdots, m)$．この問題は各 $i$ 毎に最適化することが可能ではあるが，MPC では $(Q_i, q_i)$ を変えて問題 (4) を何度も解くため，最適化問題を解く回数の観点から，まとめて最適化することが一般的である．

## 参考文献


[1] F. Facchinei, J. Júdice, and Soares, An active set Newton algorithm for large-scale nonlinear programs with box constraints. *SIAM Journal on Optimization*, **8** (1998), 158–186.

[2] Y. Xiao and Q Hu, Subspace Barzilai-Borwein gradient method for large-scale bound constrained optimization. *Applied Mathematics and Optimization*, **58** (2008), 275–290.

[3] 児島晃, 大塚敏之, モデル予測制御の考え方. 計測と制御, **42** (2003), 310–312.