日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

競合市場における動的価格の同調とその継続条件について

01208833 神奈川大学 *佐藤公俊 Sato Kimitoshi

1. はじめに

近年，多くの企業が商品やサービスの価格設定にアルゴリズムを用いている．競合市場においてアルゴリズムの自己学習等により価格が同調し，競合時の価格を上回る価格が設定されることが問題となっている．実際に，ドイツの小売ガソリン市場ではアルゴリズムによる価格設定が採用されたあと価格同調が生じ，その結果マージンが約 9%増加したと報告されている（Assad et al. 2020）．アルゴリズムによる同調では，価格決定の担当者間に事前のコミュニケーションが必要ないため，現状，違法性の立証が困難である．このため，消費者保護の観点から，どのようなアルゴリズムがどのような市場環境で価格を同調させるかを理解することが求められている．

先行研究では，無限期間にわたる繰り返しゲームにおいて自己学習型アルゴリズムを用いた場合に価格が同調（共謀）することが示されている（例えば，Hansen et al. 2021）．しかし，需要関数の初期学習に長い期間を必要とする際には，その期間内に期待される利益が得られなければ，企業がアルゴリズムの使用を途中で断念することが考えられる．本研究では自己学習型に代わり，有限期間の下で需要関数のパラメータを所与とし，複数企業が同一アルゴリズムを採用する市場において価格同調が継続する条件を明らかにする．

2. 記号の定義

複数の企業がそれぞれ 1 つの製品（または，サービス）を販売する市場を考える．企業数を n とし，企業 i $(i=1,\dots,n)$ の初期在庫量を c_i とする．販売期間は有限であり，期間の途中に在庫の補充を認めない．販売期間は T 期間からなり，$t=T$ 期の期首に販売が始まり，$t=1$ 期の期末に終了する．各期に多くとも 1 人の顧客が購入に訪れ，その顧客は複数の企業が販売する製品のうち 1 つを購入するか，またはどの企業からも製品を購入しないかを決める．顧客の到着率を $\lambda(>0)$，t 期における企業 i の販売価格を $p_{i,t}(\geq 0)$ とする．また，t 期における価格ベクトルを $\boldsymbol{p}_t=\{p_{1,t},\dots,p_{n,t}\}$ とする．ここで，各企業の製品特性や在庫情報は公開されており，各企業は価格決定の際にこれらの情報を利用可能であると仮定する．顧客が企業 i の製品を購入する確率を多項ロジットモデルを用いて，$q_i(\boldsymbol{p}) = \exp\{w_i(p_i)\}/(1+\sum_{j=1}^{n}\exp\{w_j(p_j)\})$ と定義する．ただし，$w_i(p_i)=\alpha_i-\beta p_i$ であり，α_i は固定効果，β は価格感度を表す．顧客が製品を購入しない確率を $q_0(\boldsymbol{p}_t) = 1-\sum_{i=1}^{n} q_i(\boldsymbol{p}_t)$ とする．

本研究では，各企業はトリガー戦略をとると仮定する．すなわち，他の企業が同調価格を採用している間は協調関係を続け，1 社でも同調価格と異なる価格を採用した場合（逸脱と呼ぶ）にすべての企業は競争時の均衡価格を採用し，競合状態となる．

3. 同調・競合・逸脱モデル

すべての企業が同調するとき，n 企業の総期待収益が最大となるように最適価格を決定する．企業 i の在庫量を x_i とすると，第 t 期首に在庫量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ であるとき，**同調モデル**における t 期以降の最大総収益は

$$\Phi_t(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}_+^n}\Bigg\{\lambda \sum_{i\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x})} q_i(\boldsymbol{p})(p_i+\Phi_{t-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_i)) + (\lambda q_0(\boldsymbol{p})+1-\lambda)\Phi_{t-1}(\boldsymbol{x})\Bigg\}$$

となる．ここで，$\mathcal{N}(\boldsymbol{x})=\{i \mid x_i>0\}$ は販売可能な企業の集合を表す．また，境界条件を $\Phi_0(\cdot)=0$ とする．この問題を解くことで得られる企業 i の最適価格を $\tilde{p}_i$ とし，最適価格ベクトルを $\tilde{\boldsymbol{p}}=(\tilde{p}_1,\dots,\tilde{p}_n)$ とする．

次に，**競合モデル**を定義する．ナッシュ均衡価格をまとめたベクトルを $\hat{\boldsymbol{p}}_t(\boldsymbol{x})$ とすると，企業 i の期待収益は

$$\Psi_{i,t}(\boldsymbol{x}) = \lambda\psi_{i,t}(\hat{\boldsymbol{p}}_t(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\Psi_{i,t-1}(\boldsymbol{x})$$

となる．ここで，$\psi_{i,t}(\cdot,\cdot)$ は顧客が購入する場合の期待収益を表し，

$$\psi_{i,t}(\boldsymbol{p}_t,\boldsymbol{x}) = q_i(\boldsymbol{p}_t)(p_{i,t}+\Psi_{i,t-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_i)) + \sum_{j\neq i, j\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x})} q_j(\boldsymbol{p}_t)\Psi_{i,t-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_j) + q_0(\boldsymbol{p}_t)\Psi_{i,t-1}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

と定義する．境界条件は $\Psi_{i,0}(\cdot)=0$ と，$x_i=0$ のとき，$\Psi_{i,t}(\boldsymbol{x})=0$ である．

最後に，**逸脱モデル**を定式化する．第 t 期首で企業 i が協調関係から逸脱するとき，企業 i の最大総収益を

$$V_{i,t}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{p}}_{-i}) = \max_{p_i\in\mathbb{R}_+}\{\lambda\psi_{i,t}(\bar{\boldsymbol{p}}_i,\boldsymbol{x}) + (1-\lambda)\Psi_{i,t-1}(\boldsymbol{x})\}$$

によって与える．すなわち，企業 i 以外の企業が同調価格 $\tilde{\boldsymbol{p}}_{-i} = (\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_{i-1}, \tilde{p}_{i+1}, ..., \tilde{p}_n)$ を設定しているとき，企業 i は自社の収益が最大となる最適価格を設定する．ただし，$\bar{\boldsymbol{p}}_i = (\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_{i-1}, p_i, \tilde{p}_{i+1}, ..., \tilde{p}_n)$ である．$t-1$ 期以降は競合状態となるため，総期待収益は (1) 式により与えられる．

同調によって得られる全企業の総収益のうち企業 i に分配される割合を π_i とする．ただし，$\pi_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$．このとき，$\pi_i \Phi_t \geq V_{i,t}$，$i = 1, ..., n$，を満たす間は競争状態よりも協調状態の方がすべての企業にとって収益が高いため同調が継続すると仮定する．

図 1 は $T = 30$，$n = 2$，$c_1 = 15$, $c_2 = 10$，$\lambda = 0.7$，$a_1 = a_2 = 5$，$\beta = 0.1$ のときに逸脱が起こる残存期間を表している．例として，$(x_1, x_2) = (14, 8)$ のとき，残りの販売期間が 5 期となるまで逸脱が起こらないことを意味する．これより，企業間の在庫量の差が大きい場合には逸脱が早期に起こるため，同調が持続しにくいといえる．また，初期在庫量の少ない企業の方が早く逸脱する．

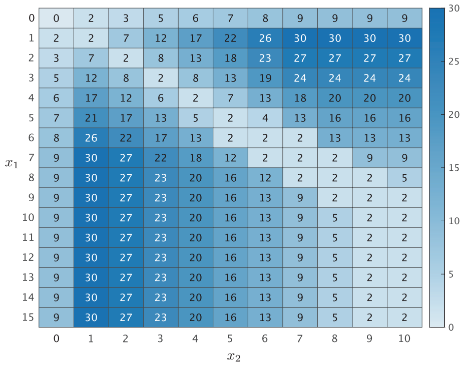

図 1: 在庫量と逸脱のタイミング

4. 在庫制約のない場合

本節では，初期在庫量が十分大きい場合（$t \ll x_i$）を考える．この場合，各企業は販売期間を通して一定価格により販売することが最適であることが示される．ナッシュ均衡価格の平均値を $\bar{p} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i$ とすると，同調の発生条件は以下となる．

命題 4.1. $\tilde{p} - 1/\beta > n(\bar{p} - 1/\beta)$ を満たすとき，価格の同調が生じる．

これより，競合時の市場平均価格に対して同調価格 $\tilde{p}$ が十分大きい市場では，同調が起こりうる．この条件を企業数について変形すると，$n > n^*$ を得る．ただし，$n^* = \inf\{n \geq 2 \mid \eta(n) = 0\}$，$\eta(n) \equiv \tilde{p} - \sum_{i=1}^{n} \hat{p}_i + (n-1)/\beta$ である．したがって，企業数が多い市場ほど，同調が起こりやすいことがわかる．

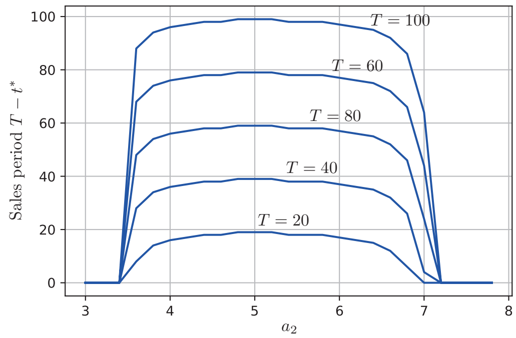

図 2: 逸脱時刻と固定効果の関係（$a_1 = 5$）．

命題 4.2. 任意の分配率 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, ..., \pi_n)$ に対して，企業の固定効果が $\boldsymbol{\alpha} \in \bigcap_{i=1}^{n} (\mathcal{A}_{1,i} \cap \mathcal{A}_{2,i})$ を満たすとき，$\mathcal{T} = \{T, T-1, ..., t^*\}$ の期間は同調が継続する．ここで，$t^* \equiv \max_{1 \leq i \leq n} t_i$ は逸脱の発生時点を表す．ただし，

$$t_i = \frac{W[\tilde{L}_i e^{\alpha_i - 1}] - W[\hat{L}_i e^{\alpha_i - 1}]}{\pi_i W\left[\sum_{i=1}^{n} e^{a_i - 1}\right] - W[\hat{L}_i e^{\alpha_i - 1}]} > 1.$$

図 2 は $n = 2$ の場合に製品特性を表す固定効果と同調が継続する期間との関係を示している．製品特性に差があるほど，早い時期に逸脱が起こることがわかる．また，販売期間が長い場合には，特性差があったとしても同調は持続しやすいといえる．

補助定理 4.3. 同調状態における企業 i の収益を $\Phi_{i,t} \equiv \tilde{p}^* q_i(\tilde{p}^*)$ とする．このとき，$\Phi_{i,t} = \pi_i \Phi_t$ となる分配率は

$$\pi_i^0 = \frac{e^{\alpha_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\alpha_j}}.$$

命題 4.4. $T = 1$ のとき，もし $\alpha_i \geq 2$ および $\pi_i^0 < (e-2)/(e-1) \approx 0.418$, $i = 1, ..., n$, ならば，同調は生じない，$\pi_i^0 \Phi_1 < V_{i,1}$，$i = 1, ..., n$.

これより，1 期間モデルにおいては分配率の偏りが少ない（商品特性に差がない）場合，同調は起きないことがわかる．これは販売期間が 1 期間であるため，顧客が多くとも 1 人しか訪れないため，製品の特性が似ている場合は価格競争となることを意味する．

参考文献

[1] Assad, S., Clark, R., Ershov, D., Xu, L. 2020. Algorithmic pricing and competition: empirical evidence from the german retail gasoline market. CESifo Working Paper, No. 8521.

[2] Hansen, K.T., Misra, K., Pai, M.M. 2021. Algorithmic collusion: supra-competitive prices via independent algorithms. Marketing Science, 40(1), 1-12.