日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

道路網上の固定施設に対する需要割当問題

01308990　慶應義塾大学　*田中健一　TANAKA Ken-ichi
01704163　名古屋大学　柳浦睦憲　YAGIURA Mutsunori

1.　はじめに

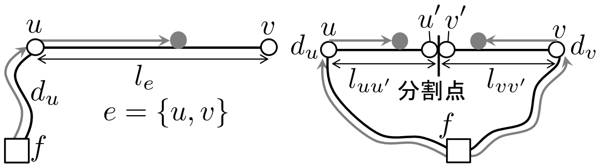
道路網上に配置された，同一主体が運営する複数の施設において，宅配型のサービスを新規に導入する状況を考える．施設の担当区域を，施設間の負荷の均等化と配送の効率性に着目して構成する問題を提案する．既存の区割りモデルでは，メッシュや小地区内で人口を集約したり，地区間の距離を直線距離で代用するなど [1]，小地域への適用には不向きな仮定が置かれる場合が多い．

街区レベルの応用に適したモデル構築のために，道路リンクに沿って需要が連続的に分布するネットワークを想定する．全需要に対する総配送距離が最小になるように，既存施設に担当する辺を割り当てる問題を考える．さらに，各施設の担当区域が地理的にまとまりのある分かり易い形状になることを目的としたアプローチを提案する．なお，需要が頂点から生じる離散的な設定では，類似の状況を扱った既存研究 [2] が存在するが，モデル化の方法や解法は本研究と大きく異なっている．

2.　状況設定と定式化および求解法

道路網を表す無向グラフを $G=(V,E)$ と表す．施設の集合を $F\subset V$，施設数を p とする．辺 $e\in E$ の長さを l_e，$e\in E$ における 1 日当たりの配送需要量を w_e と表す．さらに，$W=\sum_{e\in E} w_e$ とする．ここで，各辺上の需要は連続的かつ一様に生じると仮定する．道路網全体における総配送距離を計算するため，辺 $e\in E$ を施設 $f\in F$ が担当する場合の 1 日当たりの総配送距離 c_e^f を導入する．

図 1 に c_e^f の計算方法を示す．図 1(a) は，辺 $e=\{u,v\}$ 上の点への最短経路が常に u を含む場合である (常に v を含む場合も同様)．図 1(b) は，f からの u 経由の最短距離と v 経由の最短距離とが等しくなる分割点が辺上に生じるため，2 通りの最短経路が存在する場合である．辺 $e=\{u,v\}$ を，分割点で辺 $\{u,u'\}$ と $\{v,v'\}$ に分割する．f から u と v までの最短距離をそれぞれ d_u および d_v と表す．辺上で需要が一様分布に従うという仮定より，図 1(a) と (b) それぞれの場合に対し，$c_e^f=w_e\left(d_u+\frac{l_e}{2}\right)$ および



(a) 最短経路が 1 通り　　**(b)** 最短経路が 2 通り

図 1: c_e^f の計算方法

$c_e^f=w_e\frac{l_{uu'}}{l_e}\left(d_u+\frac{l_{uu'}}{2}\right)+w_e\frac{l_{vv'}}{l_e}\left(d_v+\frac{l_{vv'}}{2}\right)$ となる．さらに，需要の均等割当ての値 W/p からの，ずれの許容割合を表現する定数を μ とする．

各施設の担当区域を表現するために，施設 $f\in F$ が辺 $e\in E$ を担当する場合に 1，そうでない場合に 0 を取る 0-1 変数 x_e^f を導入する．需要割当問題の基本的なモデルとしてまず以下を考える:

$$\text{minimize} \quad \sum_{f\in F}\sum_{e\in E} c_e^f x_e^f \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \frac{W}{p}(1-\mu)\le \sum_{e\in E} w_e x_e^f \le \frac{W}{p}(1+\mu) \quad \forall f\in F, \tag{2}$$

$$\sum_{f\in F} x_e^f = 1 \quad \forall e\in E, \tag{3}$$

$$x_e^f\in\{0,1\} \quad \forall e\in E, \forall f\in F. \tag{4}$$

この問題の最適解における担当区域は，後述する図 2(a) のように，飛び地が生じるなど，複雑な形状になり得る．ある施設に割り当てられた辺集合が誘導する部分グラフの連結成分数が少なくなる解の生成を目的とした，次のモデルを提案する．解 $\boldsymbol{x}$ において，頂点 v に接続する辺のいずれかが割り当てられた施設を全て集めた集合を $F(\boldsymbol{x},v)$ と表す．$F(\boldsymbol{x},v)$ の要素数を，全頂点で合計した値 $\gamma(\boldsymbol{x})=\sum_{v\in V}|F(\boldsymbol{x},v)|$ を導入する．$\gamma(\boldsymbol{x})$ が小さな解は，担当区域の境界が単純で分かり易いことが期待できる．そこで，需要割当問題において，$\gamma(\boldsymbol{x})$ の値がある定数 $k_{\max}$ 以下であるという制約を導入する．頂点 $v\in V$ に接続する辺の中に，施設 $f\in F$ が担当するものが存在する場合に 1，そう

でない場合に 0 を取る 0-1 変数 y_v^f を導入する．頂点 v の次数 $\deg(v)$，頂点 v に接続する辺集合 $\delta(v)$ を用いて，上述の制約を以下のように表せる:

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e^f \leq \deg(v) y_v^f \quad \forall v \in V, \forall f \in F, \qquad (5)$$

$$\sum_{v \in V} \sum_{f \in F} y_v^f \leq k_{\max}. \qquad (6)$$

式 (1) から式 (6) で定義される問題を，$k_{\max}$ をパラメータとする問題とみて $\mathrm{P}(k_{\max})$ と表し，その最適解を $\boldsymbol{x}(k_{\max})$ と表す．$k_{\max}$ の値を徐々に小さくしながら，望ましい解が得られるまで $\mathrm{P}(k_{\max})$ を繰り返し解く方法により解を得る．

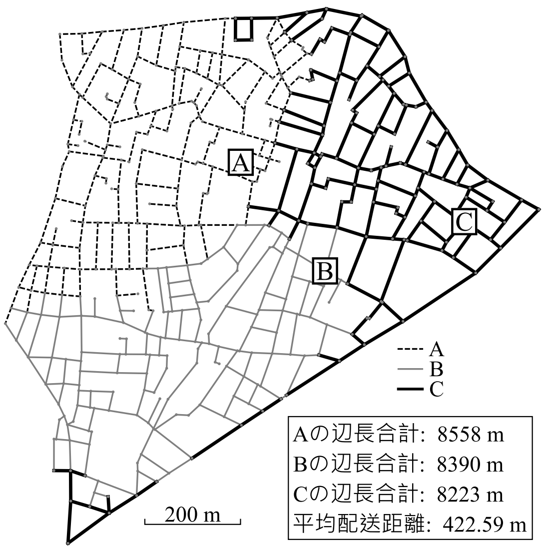
1. $k_{\max}$ についての制約がない問題 $\mathrm{P}(\infty)$ を解き，終了条件が満たされれば $\boldsymbol{x}(\infty)$ を出力して終了．そうでなければ，2 へ進む．
2. $k_{\max} \leftarrow \gamma(\boldsymbol{x}(\infty)) - 1$ として，$\mathrm{P}(k_{\max})$ を解き，終了条件が満たされれば $\boldsymbol{x}(k_{\max})$ を出力して終了．以降，同様の方法で $k_{\max}$ を小さくして問題を解く操作を，終了条件が満たされるまで繰り返す．

次節の数値例では，各施設の担当区域が地理的にまとまりのあることを表す指標の例として，担当区域が連結であることに着目し，終了条件として，「$\boldsymbol{x}(k_{\max})$ の全ての担当区域が連結である，または，反復回数が 100 回に到達した」と設定した．

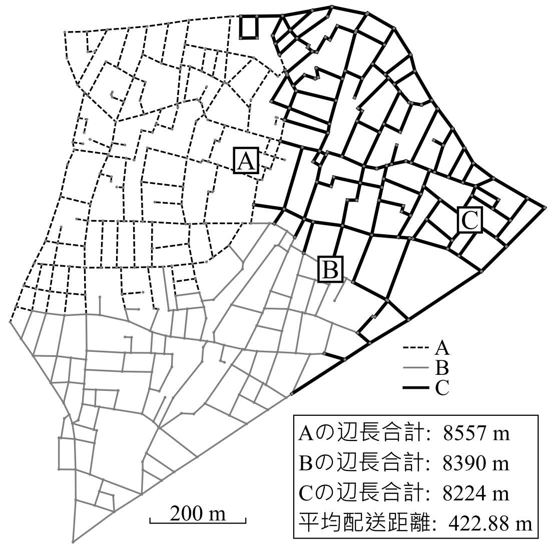
3. 道路網への適用と考察

提案法を OpenStreetMap (URL: `https://openstreetmap.jp/`) から作成した道路網に適用する．図 2 の道路網は，頂点数 448，辺数 620 で，各辺長は端点間の直線距離で与えた（四捨五入して 1 m 単位の整数値として設定）．一様な需要分布（単位長さ・1 日当たりの需要量が共通）を仮定する．前述の求解法を Python を用いて実装し，$\mathrm{P}(k_{\max})$ の最適解の求解には Gurobi Optimizer 9.5.1 を用いた．p を 2, 3, 4，μ を 0.1, 0.02 と設定した，計 6 通りのシナリオにおいて，施設の頂点をランダムに与えた 100 個の例題を作成した．目的関数が配送距離の平均値に一致するよう $W = 1$ とした．

計 600 の全ての例題で連結解が得られた．さらに，連結解の平均配送距離の値は，制約なし問題の平均配送距離とほとんど変わらなかった．例えば $p = 3$, $\mu = 0.02$ では，100 例題の増加率の平均値は 0.0034%，最大値は 0.0701%であった．この最大値を与えた例が図 2 である．図 2(b) の解では，連結であり，各施設の担当区域が視覚的にもよりまとまった形状になっていることが観測できる．



(a) 制約なし問題の最適解



(b) 出力された連結解

図 2: 提案法により生成された解

参考文献

[1] Ríos-Mercado, R.Z. (Editor): *Optimal Districting and Territory Design*, Springer, 2020.

[2] Yang, K., Shekhar, A.H., Oliver, D., and Shekhar, S.: Capacity-constrained network-voronoi diagram, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, Vol. 27, No. 11, 2015, pp. 2919–2932.