日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

金融市場の日中リターン変動要因に関するベイズ推論

05000028　兵庫県立大学　*落合夏海　OCHIAI Natsumi

1.　はじめに

経済のグローバル化や情報通信技術の発達による高頻度取引の拡大などの影響から, 金融市場における取引時間中の大きな価格変動がより頻繁に発生している. 日中のボラティリティ変動のメカニズムを検証することは, 日本の金融市場を理解するうえで大変重要となる.

取引時間における日中リターンの変動を分析した先行研究として, Stroud and Johannes [1] は, アメリカの E-mini S&P 500 の 5 分間リターンのボラティリティに対して, マルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法によるベイズ推定法を提案した. 日本市場のボラティリティの研究として, Tanizaki and Hamori [2] は, 日経平均株価の日次データを使って, 海外市場から日本へのボラティリティの波及効果, さらにボラティリティの曜日効果・休日効果をベイズ的な手法を使って分析した.

本研究では, 日本市場における取引時間中のボラティリティ変動に影響を与える要因を検証するため, 日経 225 先物の分足データに対して, ベイズ推論を用いた分析を行う.

2.　確率的ボラティリティ変動（SV）モデル

分足の対数価格リターン r_t を以下の SV モデル

$$r_t = \boldsymbol{z}_t\boldsymbol{\alpha} + \exp\left(\frac{1}{2}h_t\right)\varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim N(0,1), \qquad (1)$$

$$h_t = \boldsymbol{x}_t\boldsymbol{\gamma} + \delta h_{t-1} + \eta_t,\ \ \eta_t \sim N(0,\sigma^2) \qquad (2)$$

によって定式化する. ここで, ε_t は時間に関して互いに独立かつ同一な平均 0, 分散 1 の正規分布, η_t は時間に関して互いに独立かつ同一な平均 0, 分散 σ^2 の正規分布であり, $\boldsymbol{z}_t$ と $\boldsymbol{x}_t$ はそれぞれ外生変数ベクトルで非確率的, $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\gamma}$ はそれぞれ外生変数のパラメータベクトルとする. $\exp\left(\frac{1}{2}h_t\right)$ はボラティリティを表し, 時間に依存し観測不可能と仮定する. $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma}$, δ, σ^2 はモデルにおいて推定されるパラメータである. これより, 観測可能な分足リターン r_t は, 確定的な項 $\boldsymbol{z}_t\boldsymbol{\alpha}$ と確率的な項 $\exp\left(\frac{1}{2}h_t\right)\varepsilon_t$ から成り, 観測されない状態変数 h_t は, 外生変数の項 $\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{\gamma}$, 一期前の項 δh_{t-1} とノイズ η_t によって与えられる.

一般に, 取引時間中のボラティリティ変動は周期性を持つことが知られており, 取引の開始時刻と終了時刻付近にボラティリティが高くなることから U 字型の形状を持つこと, また, 海外市場の開始時刻付近にもボラティリティが高くなる傾向があると言われる. 以上の日内周期性を考慮するため, 確定的な項 $\boldsymbol{z}_t\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{\gamma}$ に対し, ダミー変数 H_{tk}（時刻 t が期間 k に一致すれば 1, そうでなければ 0）を用いて, $\boldsymbol{H}_t'\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{H}_t'\boldsymbol{\gamma}$ と与える.

さらに, マクロ経済のアナウンスメント等のイベントが日中のボラティリティに与える影響も考慮する. 日内周期性と同様の手法を使って, あるニュースイベント i に対するダミー変数 I_{itk}（時刻 t が期間 k に一致すれば 1, そうでなければ 0）を用いて, $\boldsymbol{I}_t'\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{I}_t'\boldsymbol{\gamma}$ により, イベント効果を考える.

(1) 式は観測方程式, （2）式は遷移方程式と呼ばれ, このモデルは非線形・非ガウシアン状態空間モデルとなる.

3.　推定手法

上記の設定のもとで, マルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法に基づくベイズ推定によって, $\boldsymbol{B}_n = (h_0, h_1, \cdots, h_n)$ とパラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\gamma}', \delta, \sigma)$ の推定を行う. (1) 式と (2) 式から, h_t が与えられたときの r_t の条件付き密度 $f_r(r_t|h_t)$ と, h_{t-1} が与えられたときの h_t の条件付き密度 $f_h(h_t|h_{t-1})$ は,

$$f_r(r_t|h_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\exp(h_t)}} \times \exp\left(-\frac{1}{2\exp(h_t)}(r_t - \boldsymbol{z}_t\boldsymbol{\alpha})^2\right),$$

$$f_h(h_t|h_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(h_t - \boldsymbol{x}_t\boldsymbol{\gamma} - \delta h_{t-1})^2\right)$$

で与えられる. これより, パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を所与とすると、$\boldsymbol{R}_n = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$ と $\boldsymbol{B}_n = (h_0, h_1, \cdots, h_n)$ の同時分布は

$$f(\boldsymbol{R}_n, \boldsymbol{B}_n|\boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^{n} f_r(r_t|h_t) f_h(h_t|h_{t-1})$$

となる. パラメータの事前分布に対して、以下の無情報事前分布

$$p(\alpha) \propto 定数, \quad p(h_0) \propto 定数, \quad p(\gamma,\delta) \propto 定数, \quad p(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

を設定すると, $\boldsymbol{R}_n$, $\boldsymbol{B}_n$, $\boldsymbol{\theta}$ の同時分布は,

$$f(\boldsymbol{R}_n, \boldsymbol{B}_n, \boldsymbol{\theta}) \propto \frac{1}{\sigma^2} \prod_{t=1}^{n} f_r(r_t|h_t) f_h(h_t|h_{t-1}) \qquad (3)$$

で与えられる. (3) 式から, $\boldsymbol{B}_n$ と $\boldsymbol{\theta}$ をサンプリングするための条件付き密度は, 次のように計算される:

$$\begin{aligned} & f(h_t|\{h_s\}_{s\neq t}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{R}_n) \\ & \propto \frac{1}{\sqrt{\exp(h_t)}} \exp\left(-\frac{1}{2\exp(h_t)}(r_t - \boldsymbol{z}_t\boldsymbol{\alpha})^2\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(h_{t+1} - \boldsymbol{x}_{t+1}\boldsymbol{\gamma} - \delta h_t)^2\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(h_t - \boldsymbol{x}_t\boldsymbol{\gamma} - \delta h_{t-1})^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left.\begin{pmatrix}\gamma \\ \delta\end{pmatrix}\right| \boldsymbol{B}_n, \boldsymbol{\alpha}, \sigma^2 \\ & \sim N\left(\left(\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t^{*\prime}\boldsymbol{x}_t^*\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t^{*\prime} h_t, \sigma^2 \left(\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{x}_t^{*\prime}\boldsymbol{x}_t^*\right)^{-1}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\alpha} \,\big|\, \boldsymbol{B}_n, \boldsymbol{\gamma}, \delta, \sigma^2 \\ & \sim N\left(\left(\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{z}_t'\boldsymbol{z}_t \exp(-h_t)\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{z}_t' r_t \exp(-h_t), \right. \\ & \qquad \left. \left(\sum_{t=1}^{n} \boldsymbol{z}_t'\boldsymbol{z}_t \exp(-h_t)\right)^{-1}\right), \end{aligned}$$

$$\sigma^2 | \boldsymbol{B}_n, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \delta \sim IG\left(\frac{n}{2}, \frac{2}{\sum_{t=1}^{n}(h_t - \boldsymbol{x}_t\boldsymbol{\gamma} - \delta h_{t-1})^2}\right).$$

ここで, $\boldsymbol{x}_t^* = (\boldsymbol{x}_t, h_{t-1})$ であり, IG は逆ガンマ分布を表す. 上記の条件付き密度関数を使ったギブス・サンプリングにより, $\boldsymbol{B}_n$ と $\boldsymbol{\theta}$ の確率標本を生成する. ただし, 上の h_t の条件付き密度関数からのサンプリングは困難であることから, メトロポリス–ヘイスティングス（MH）アルゴリズムを使用する. ここで h_t の提案密度関数 $f_*(h_t)$ を

$$f_*(h_t) \propto f_r^*(h_t) f_h(h_{t+1}|h_t) f_h(h_t|h_{t-1})$$

として与える. ただし $f_r^*(h_t)$ は, 平均を $f_r(r_t|h_t)$ のモード, 分散をモードにおける $f_r(r_t|h_t)$ の情報行列の逆行列とした正規分布を表す.

以上から, パラメータ推定のためのギブス・サンプラーは次のようになる.

ギブス・サンプラー

1. $\boldsymbol{B}_n$ と $\boldsymbol{\theta}$ に適当な初期値を与える.
2. メトロポリス–ヘイスティングスアルゴリズムによって, $h_t, t = 1, 2, \cdots, n$ の確率標本を以下のように生成する.
   (a) 提案密度 $f_*(h_t)$ より h_t の新たな候補 h_t^* を発生させ, 採択確率

   $$\omega(h_{t,i-1}, h_t^*) = \min\left(\frac{f_r(r_t|h_t^*)/f_r^*(h_t^*)}{f_r(r_t|h_{t,i-1})/f_r^*(h_{t,i-1})}, 1\right)$$

   を計算する.

   (b) $(0, 1)$ 上の一様乱数 u を発生させ,

   $$h_{t,i} = \begin{cases} h_t^* & u \leq \omega(h_{t,i-1}, h_t^*) \text{ のとき} \\ h_{t,i-1} & u > \omega(h_{t,i-1}, h_t^*) \text{ のとき} \end{cases}$$

   とする.

   (c) $t = 1, 2, \cdots, n$ について, (a) と (b) を繰り返す.
3. パラメータ $\boldsymbol{\theta}_i = (\boldsymbol{\alpha}_i', \boldsymbol{\gamma}_i', \delta_i, \sigma_i)$ について, 2. で生成した $\boldsymbol{B}_n$ とそれ以外のパラメータを与えて, 条件付き事後密度から順次サンプリングする.
4. $i = -M+1, -M+2, \cdots, N$ について, 上の 2. と 3. を繰り返す.

ここで M は初期値に依存する期間（バーンイン期間）であるとして捨て, 後半の N 期間のみを分析に使用する.

4. データと推定結果

使用するデータは日経 225mini 先物の分足データで, 期間は 2016 年 8 月から 2021 年 8 月の 5 年間を用いる. 取引時間は日中立会 8:45-15:15, 夜間立会 16:30-翌 5:30 である.

データと推定結果の詳細は当日の発表で報告する.

参考文献

[1] Stroud, J. R. and Johannes, M. S. (2014). Bayesian Modeling and Forecasting of 24-Hour High-Frequency Volatility. Journal of the American Statistical Association, 109, 1368-1384.

[2] Tanizaki, H. and Hamori, S. (2009). Volatility Transmission between Japan, U.K. and U.S. in Daily Stock Returns. Empirical Economics, 36, 27-54.