日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

Lee-Carter モデルの一貫モデルの提案とそのパラメータ推定及び将来予測

東京理科大学大学院　*金澤 怜央　KANAZAWA Reo
01111120　東京理科大学　黒沢 健　KUROSAWA Takeshi

1　Lee-Carter モデル

Lee and Carter [2] によって現在でも広く利用されている対数死亡率を表現するモデルが提案された．このモデルは時点 t における年齢 x $(1 \leq x \leq n)$ 歳の死亡率 $Q_{x,t}$ を

$$\log Q_{x,t} = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \tag{1}$$

と表現する．ただし $\varepsilon_{x,t}$ は誤差項である．また上式におけるパラメータとして a_x, b_x, k_t をそれぞれ, 各年齢 x における平均死亡率の対数値, k_t に対する各年齢における死亡率の受ける影響度合い, 各時点 t における死亡率 a_x からの偏差水準と定義する．このモデルの時刻 T までの死亡率データを用いたパラメータ推定において, Lee and Carter は特異値分解を利用する方法を提案した．また, 将来死亡率の予測においては, 時間に依存する k_t を ARIMA(0,1,0) モデル, すなわち $k_t = k_{t-1} + \theta + \xi_t, \quad \xi_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$ として線形的に予測をしている．しかし, この手法は k_t の扱いを, 観測済みデータによるモデル推定部分では非確率モデル, 将来時刻 t $(t > T)$ における将来死亡率予測部分では確率モデルとしており, 全体的な一貫性がない．そこで Girosi and King [1] は k_t を確率変数 κ_t に置き換え, 2 つの部分からなる推定と予測のモデルを一つの確率モデルとして表現を与えたが, 複雑な多変量時系列モデルとなり, 従属列を扱うことから推定が困難であり, そのパラメータ推定法については議論されていない．

よって本研究では Girosi and King による一貫モデルに準じた Lee-Carter モデルの一貫モデルの提案を行う．$k_t = E[\kappa_t]$ として定めることで既存のモデルの概念と矛盾することない確率モデルとして定義され, 推定したパラメータを用いて将来予測における確率点を与えることが可能になる．

2　提案手法

ここからは T を観測ベクトル数, n を生命表における最終年齢とし, 以下の式に従う将来予測部分 κ_t と, それぞれ a_x, b_x を成分とするベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を用いて表現した推定部分の二段階表現をする．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_t &= \overline{\boldsymbol{m}} + \kappa_t \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \\ \kappa_t &= \kappa_{t-1} + \theta + \zeta_t - \zeta_{t-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \sigma_\varepsilon^2 I_n), \quad \zeta_t \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_\zeta^2).$$

ただし $\boldsymbol{M}_t = (\log Q_{1,t} \cdots \log Q_{n,t})'$ とし, $\overline{\boldsymbol{m}}$ をその平均ベクトルとする．そして θ と $\boldsymbol{b}$ を

$$\theta = \sum_{x=1}^{n} \psi_x, \quad \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{\psi}}{\sum_{x=1}^{n} \psi_x} \tag{3}$$

と定めることで Lee and Carter による特異値分解を用いたパラメータ推定結果との親和性を持たせる．そして (2) を結合し以下の確率モデルを得る．

$$\boldsymbol{M}_t = \boldsymbol{M}_{t-1} + \boldsymbol{\psi} + \left(\frac{\boldsymbol{\psi}}{\sum_{x=1}^{n} \psi_x} (\zeta_t - \zeta_{t-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \right). \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{M}_t - \boldsymbol{M}_{t-1}$ とすると, その分布は平均が $\boldsymbol{\psi}$ の正規分布に従う (分散共分散行列を Σ とする)．パラメータ推定においては, $\zeta_0 = 0, \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{0}$ と仮定することで, AR モデルや MA モデルに用いられるアイデアに基づいた条件付き尤度の積によっ

て構成される疑似尤度関数が導かれる．定数項を除くと

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(\boldsymbol{\psi}, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\zeta^2) &= \frac{T-1}{2}\log(\det\Sigma^{-1}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{T-1}\left(\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{y}_k - i\boldsymbol{\psi}\right)'\Sigma^{-1}\left(\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{y}_k - i\boldsymbol{\psi}\right), \\
\Sigma &= \sigma_\zeta^2\frac{\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}'}{\left(\sum_{x=1}^{n}\psi_x\right)^2} + \sigma_\varepsilon^2 I_n.
\end{aligned} \tag{5}
$$

ただし, Σ は $\boldsymbol{\psi}, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\zeta^2$ の関数であり, 特に $\boldsymbol{Y}_t$ の平均ベクトル $\boldsymbol{\psi}$ に依存していることに注意する．そのため本研究では Σ を $\boldsymbol{\psi}$ の関数として扱わず, まず $\boldsymbol{\psi}$ と Σ を独立に推定し, 推定した Σ と $\boldsymbol{\psi}$ を用いて $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\zeta^2$ を推定する二段階推定法を提案する．

まず直感的な推定量として $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1$ と $\hat{\Sigma}_1$ をそれぞれ $\boldsymbol{Y}_t$ の標本平均, 標本分散として定める．別の推定量として, $\hat{\boldsymbol{\psi}}_2$ と $\hat{\Sigma}_2$ を (5) における疑似対数尤度関数を $\boldsymbol{\psi}$ と Σ の関数とみなして最尤推定量を計算をすることでそれぞれ

$$
\frac{\sum_{i=1}^{T-1}\sum_{k=1}^{i} i\boldsymbol{y}_k}{\sum_{i=1}^{T-1} i^2} = \frac{3\sum_{k=1}^{T-1}(k+T-1)(T-k)\boldsymbol{y}_k}{T(T-1)(2T-1)},
$$

$$
\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T-1}\left(\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{y}_k - i\hat{\boldsymbol{\psi}}_2\right)\left(\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{y}_k - i\hat{\boldsymbol{\psi}}_2\right)'.
$$

得られた $\boldsymbol{\psi}, \Sigma$ の推定値の成分 $\hat{\psi}_i, \hat{\sigma}_{i,j}^2$ を用いて $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\zeta^2$ の推定を与える．(5) より Σ の対非角成分が σ_ζ^2 にのみ依存していることを利用し, まず σ_ζ^2 を推定する．その後, 対角成分に現れる σ_ε^2 をそれぞれ最小二乗法を用いて推定すると

$$
\hat{\sigma}_\zeta^2 = \frac{\left(\sum_{x=1}^{n}\hat{\psi}_x\right)^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\hat{\psi}_i\hat{\psi}_j\hat{\sigma}_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\hat{\psi}_i^2\hat{\psi}_j^2},
$$

$$
\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\sigma}_{i,i}^2 - \hat{\sigma}_\zeta^2\frac{\hat{\psi}_i^2}{\left(\sum_{x=1}^{n}\hat{\psi}_x\right)^2}\right).
$$

3 将来予測

$m_{x,t}, \kappa_t$ の将来予測における確率点を構成する．ここでは各年齢 x, 時刻 t における死亡率観測データと, それを用いて推定された $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ と $\hat{\sigma}_\varepsilon^2, \hat{\sigma}_\zeta^2$ の値を利用している．また, θ の推定値, k_t の実現値をそれぞれ

$$
\hat{\theta} = \sum_{x=1}^{n}\hat{\psi}_x, \quad \hat{k}_t = \sum_{x=1}^{n}\left(\log q_{x,t} - \frac{q_{x,1}+\cdots q_{x,T}}{T}\right)
$$

とし, κ_t の将来予測は $\hat{k}_t$ を利用する．(2) と (4) から導かれる条件付分布を利用することで確率点を計算する．まず h 年先の値として取りうる $m_{x,T+h}$ の上側, 下側 $1-\alpha\%$ 点は複合同順でそれぞれ

$$
m_{x,T} + h\hat{\psi}_x \pm z_{(\alpha)}\sqrt{2\left(\frac{\hat{\psi}_x}{\sum_{x=1}^{n}\hat{\psi}_x}\right)^2\hat{\sigma}_\zeta^2 + 2\hat{\sigma}_\epsilon^2}.
$$

同様に κ_{T+h} についても

$$
\hat{k}_T + h\hat{\theta} \pm z_{(\alpha)}\sqrt{2\hat{\sigma}_\zeta^2}.
$$

ただし $z_{(\alpha)}$ は標準正規分布の上側 $\alpha\%$ 点とする．

パラメータ推定の Bias や MSE, 将来予測の精度等は当日シミュレーション結果を報告する．

参考文献

[1] Federico Girosi and Gary King. Understanding the Lee-Carter mortality forecasting method. `https://gking.harvard.edu/files/abs/lc-abs.shtml`, 2007.

[2] Ronald D. Lee and Lawrence R. Carter. Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, pp. 659–672, 1992.