コンピュータワームモデルによる新製品普及モデル

01206600　NTT ネットワークサービスシステム研究所　*佐藤大輔　SATOH Daisuke

1.　はじめに

新製品普及モデルにおいて Bass モデル [1] は代表的なモデルである． Bass モデルでは飽和値をモデルパラメータとして与えられているため，飽和値が一定という前提をおいている．しかし状況の変化等により飽和値そのものが変化する可能性がある．普及拡大の努力は同時に飽和値増大の努力でもあるのが一般的であろう．飽和値増大をモデルに含めた新製品普及モデルが望まれる．本稿ではコンピュータワームモデル [2]（以後，ワームモデル）によって飽和値増大を表現可能な新製品普及モデルを提案する．

2.　Bass モデル

Bass モデルは次の微分方程式で記述される．

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(p + \frac{q}{m}N(t)\right)(m - N(t)), \tag{1}$$

ここで $N(t)$ は時間 t までの新製品の累積購入者，m は飽和値，p は先導購入係数，q は追随購入係数である．式 (1) は以下の解を持つ．

$$N(t) = \frac{m(1 - e^{-(p+q)(t-\tau)})}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)(t-\tau)}}. \tag{2}$$

ここで $\tau = 0$ であるが後の説明上，加えてある．データから m, p, q のパラメータを推定することで有益な情報を得ることができる．

3.　コンピュータワームモデル

コンピュータワームとは．広義のコンピュータウィルスのひとつであり，単体で動作可能で自己増殖する悪意プログラムのことである．その増殖過程を表現するモデルとしてコンピュータワームモデル [2] が提案されている．

$$M_{n+1} - M_n = \delta\beta(M_n - M_{n-1})(N - M_n). \tag{3}$$

ここで N は感染し得る総ノード数，$beta$ は感染率，δ は差分間隔である．式 (3) は直近で感染したノードのみが感染力を持つ一時的感染モデルである．式 (3) で

$$k = N - \frac{1}{\delta\beta}, \tag{4}$$

とおき，$\delta \to 0$ として 2 階の微分方程式が得られ，その微分方程式を積分すると微分方程式

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{\beta}{2}\left(K^2 - (M(t) - k)^2\right) \tag{5}$$

を得る．ここで K は積分定数である．式 (5) の解は

$$\begin{aligned} M(t) &= k + K\frac{1 - \frac{1}{\mu}e^{-\beta Kt}}{1 + \frac{1}{\mu}e^{-\beta Kt}} \\ &= \frac{(K+k)(1 - e^{-\beta K(t-\tau)})}{1 + \left(\frac{K+k}{K-k}\right)e^{-\beta K(t-\tau)}}. \end{aligned} \tag{6}$$

となる．ここで

$$e^{\tau} = \frac{K - k}{\mu(K + k)} \tag{7}$$

である．k は解曲線の変曲点の y 座標である．また，

$$\lim_{t\to\infty} M(t) = k + K, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to-\infty} M(t) = k - K. \tag{9}$$

より飽和値は $K + k$ となる．連続モデルでは式 (4) から $N \to \infty$ となる．

3.1.　可積分差分方程式

Bass モデルは Riccati 方程式である．Riccati 方程式に対しては，厳密解を持つ可積分差分方程式が提案 [3] されており,Bass モデルに対応した可積分差分方程式モデルも提案されている [4].

以下，ワームモデルに対する可積分差分方程式 [2] を示す．微分方程式モデルでは潜在的な最大の購入者数が無限大となってしまう．しかし現実には N は有限であるため，$\delta \to 0$ とせず有限として差分方程式で表現することにする．ここでは微分方程式の解の上をプロットできるように双線形化法 [3] による差分化を行い，以下の差分方程式 [2]

$$M_{n+1} - M_n = \delta\beta\left(K^2 - (M_{n+1} - k)(M_n - k)\right). \tag{10}$$

あるいは

$$\frac{M_{n+1} - M_n}{\delta} = \beta\left(\frac{M_{n+1} - M_{n-1}}{2}\right)\left(k + \frac{1}{\delta\beta} - M_n\right) \tag{11}$$

を得る．厳密解 [2] は

$$M_n = k + K\frac{1-\frac{1}{m}\left(\frac{1-\delta\beta K}{1+\delta\beta K}\right)^n}{1+\frac{1}{m}\left(\frac{1-\delta\beta K}{1+\delta\beta K}\right)^n}, \tag{12}$$

である．ここで

$$0 < \delta\beta K < 1. \tag{13}$$

を満たす．飽和値 [2] は M_n, M_{n+1} を用いて

$$\begin{aligned} & k+K \\ =& k+\sqrt{(k-M_{n+1})(k-M_n)+\frac{1}{\delta\beta}(M_{n+1}-M_n)} \\ =& N-\frac{1-\sqrt{1+\delta\beta(N-M_{n+1})(\delta\beta(N-M_n)-2)}}{\delta\beta}, \end{aligned} \tag{14}$$

と表せる．

4. 新製品普及モデルとしての解釈と Bass モデルとの比較

新製品普及モデルとして式 (11) を解釈することを提案する．潜在的な最大購入者数 N を有限とするため差分方程式によるモデルとしており，新規購入者は，新規購入者と直近の購入者の平均と未購入者の積に比例するモデルである．

式 (2) と式 (6) から Bass モデルとワームモデルのパラメータを比較すると

$$m = K + k \tag{15}$$

$$p = \frac{\beta}{2}(K-k) \tag{16}$$

$$q = \frac{\beta}{2}(K+k) \tag{17}$$

となる．k は解曲線の変曲点の y 座標で，

$$p \le q \quad (k \ge 0\text{ のとき}) \tag{18}$$

$$p > q \quad (k < 0\text{ のとき}) \tag{19}$$

である．他に Bass モデルでは $\tau = 0$ だが，ワームモデルでは

$$\tau = \log\frac{K-k}{\mu(K+k)} \tag{20}$$

とパラメータが一つ多い．

さらに，微分方程式モデルである Bass モデルでは最終需要数である飽和値しか存在しないが，差分版ワームモデルにおける潜在的な最大の購入者数 N が存在する．これにより需要拡大の最大値が見積もれる．また飽和値が確定している Bass モデルに対して，式 (14) で飽和値が決定するワームモデルは，販売力強化により最終需要がどのように変化するかのシミュレーションが可能となる．今，β を固定すると式 (14) から飽和値は $x = M_{n+1}(> M_n)$ の関数として

$$\begin{aligned} f(x) =& N-\frac{1}{\delta\beta} \\ &+\sqrt{\left(\frac{2}{\delta\beta}-N-M_n\right)x+\left(N-\frac{1}{\delta\beta}\right)^2-NM_n} \end{aligned} \tag{21}$$

と表される．

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{\delta\beta}-N-M_n}{2\sqrt{\left(\frac{2}{\delta\beta}-N-M_n\right)x+\left(N-\frac{1}{\delta\beta}\right)^2-NM_n}} \tag{22}$$

より $x > M_n$ で飽和値の増大具合がわかる．

5. まとめ

ワームモデルを新製品普及モデルとみなすことで潜在的な最大の購入者数や販売強化による飽和値の拡大を記述出来るモデルとなることを示した．

参考文献

[1] F.M. Bass, “A new product growth for model consumer durables,” Management Science, vol.15, no.5, pp.215–227, 1969.

[2] D. Satoh and M. Uchida, “Riccati equation as topology-based model of computer worms and discrete SIR model with constant infectious period,” Physica A, vol.566, no.125606, pp.1–14, March 2021.

[3] 広田，差分方程式講義ー連続より離散へー，サイエンス社，2000.

[4] D. Satoh, “A discrete Bass model and its parameter estimation,” Journal of the Operations Research Society of Japan, vol.44, no.1, pp.1–18, 2001.