日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

AHP の重要度のパレート最適性と凸性について

01307153　名古屋大学　*田地宏一　TAJI Kouichi

1.　はじめに

Saaty [3] が 1970 年代後半に開発した AHP (Analytic Hierarchy Process, 階層分析法) では，まず対象とすべき意思決定問題から，「総合目標」−「評価基準の集合」−「代替案の集合」の関係を抽出し，階層構造を構成したあと，総合目標から見た評価基準の重要度と評価基準から見た代替案の重要度を評価し，評価基準の重要度と代替案の重要度を積和により合成した代替案の総合評価値を提示する意思決定支援プロセスである．

AHP では，n 個の代替案 $\{1, 2, ..., n\}$ の重要度 $w = (w_1, ..., w_n)^\top$ は一対比較を行い，代替案 i が j の何倍重要かを数値 a_{ij} で提示し，これらを一対比較行列とよばれる以下の行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

から代替案の重要度 w を推定する．（一対比較行列は逆数対称性 $a_{ij} = 1/a_{ji}$，$a_{ii} = 1$ を持つことに注意する.）

一対比較行列から代替案の重要度を推定するための手法は多数提案されているが [2]，実際の応用では，主固有ベクトル法と幾何平均法が広く使われている．主固有ベクトル法は，次式

$$Aw^* = \lambda_{\max} w^*$$

を満たす一対比較行列 A の最大固有値 $\lambda_{\max}$ に対する固有ベクトル $w^* = (w_1^*, ..., w_n^*)^\top$ を代替案の重要度ベクトルとする．一対比較行列のランクが 1 の場合は，重要度の比は一対比較値と等しい ($a_{ij} = w_i^*/w_j^*$)．幾何平均法は一対比較行列の行の幾何平均を要素とするベクトル $\overline{w} = (\overline{w}_1, ..., \overline{w}_n)^\top$，ただし $\overline{w}_i = (\prod_j a_{ij})^{\frac{1}{n}}$ を重要度ベクトルとする．これは，以下の対数二乗和を最小化する問題の解と等価である．

$$\min_{w>0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln a_{ij} - \ln w_i + \ln w_j)^2$$

一方，一対比較値は重要度の比の近似 ($a_{ij} \approx w_i/w_j$) であることから，より直接的につぎの多目的最適化問題の解を重要度の推定値として採用することも考えられる．

$$\min_{w>0} \left| \frac{w_i}{w_j} - a_{ij} \right|_{i,j=1,\cdots,n, i\neq j} \tag{1}$$

ここで，最適化問題 (1) の解のパレート最適性，弱パレート最適性を定義する．

定義 1 (パレート最適性)．最適化問題 (1) において，重要度ベクトル $w = (w_1, ..., w_n)^\top > 0$ が Pareto 最適であるとは，以下の不等式を満たし，

$$\left| \frac{w'_i}{w'_j} - a_{ij} \right| \leq \left| \frac{w_i}{w_j} - a_{ij} \right|, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j$$

かつ，少なくともひとつの不等式が厳密となるような $w' = (w'_1, ..., w'_n)^\top > 0$ が存在しないことである．

定義 2 (弱パレート最適性)．最適化問題 (1) において，重要度ベクトル $w = (w_1, ..., w_n)^\top > 0$ が弱 Pareto 最適であるとは，

$$\left| \frac{w'_i}{w'_j} - a_{ij} \right| < \left| \frac{w_i}{w_j} - a_{ij} \right|, \quad i, j = 1, ..., n, \quad i \neq j$$

を満たすベクトル $w' = (w'_1, ..., w'_n)^\top > 0$ が存在しないことである．

Blanquero ら [1] は，問題 (1) について，与えられた重要度のパレート最適性を線形計画法によって確認する手法を提案した．彼らはまた，重要度がパレート最適であるとき，かつそのときに限り，重要度ベクトルから構成される有向グラフが強連結であることを示した．さらに，幾何平均法により得られた重要度が常にパレート最適であることを示し，主固有ベクトル法からの重要度がパレート最適でない例を示した．彼らの証明は，ネットワークフローの最適性と有向カットの存在の同値性に基づいている．

本稿では，重要度のパレート最適性と有向グラフの強連結性の同値性についてグラフ理論に基づ

いた別証を与える．さらに，パレート最適な重要度の凸性について考える．

2. パレート最適性とグラフの強連結性

この節では, 最適化問題 (1) における重要度のパレート最適性と, 重要度から構成されるグラフの強連結性が同値であることを示す．これは Blanquero ら [1] がすでに証明しているが, ここではグラフ理論に基づく別証を与える．

まず, 与えられた一対比較行列 $A=(a_{ij})$ と重要度ベクトル $w=(w_1,...,w_n)^\top>0$ から以下のように有向グラフ $G(w)=(N,E(w))$ を構成する．代替案の集合 $N=\{1,2,...,n\}$ を頂点集合とする．枝集合は，$i\neq j$ に対し $w_i/w_j-a_{ij}>0$ のとき i から j への有向枝 (i,j)，$w_i/w_j-a_{ij}=0$ のときは双方向の有向枝 (i,j), (j,i) を要素とする．任意の重要度 $w>0$ について, グラフ $G(w)$ のすべての頂点のペアの間に少なくとも 1 本の枝が存在することに注意する．以下の定理が成立する．

定理 3. 一対比較行列 $A=(a_{ij})$ と正のベクトル $w=(w_1,\cdots,w_n)^\top>0$ について, w が最適化問題 (1) のパレート最適な重要度であるとき, かつそのときに限り, 重要度 w から構成されるグラフ $G(w)$ は強連結である．

定理 4. 一対比較行列 $A=(a_{ij})$ と正のベクトル $w=(w_1,\cdots,w_n)^\top>0$ について, w が最適化問題 (1) の弱パレート最適な重要度であるとき, かつそのときに限り, 重要度 w から構成されるグラフ $G(w)$ には閉路が存在する．

つぎに，主固有ベクトル法で得られる重要度 w^* が弱パレート最適であることを示す．

系 5. 主固有ベクトル法により推定される重要度ベクトル $w^*=(w_1^*,...,w_n^*)^\top$ は弱パレート最適である．

対数関数の単調増加性により, ベクトル $w>0$ に対し, $w_i/w_j-a_{ij}\geq 0$ であることと, $\ln w_i-\ln w_j-\ln a_{ij}\geq 0$ であることが同値であることに注意すると, 幾何平均法で得られる重要度 $\overline{w}$ のパレート最適性を示すことができる．

定理 6. 幾何平均法により推定される重要度ベクトル $\overline{w}=(\overline{w}_1,...,\overline{w}_n)^\top$ から構成されるグラフ $G(\overline{w})$ のすべての頂点は, 入る枝と出る枝を持つ．したがって，重要度ベクトル $\overline{w}$ はパレート最適である．

補足 7. $n=3$ のとき, 固有ベクトル法と幾何平均法は一致するので, 固有ベクトル法はパレート最適である．

3. Pareto 最適な重要度集合の非凸性

$n=3$ のときにはパレート最適な重要度集合が凸集合となることを示すことができる．しかし, $n\geq 4$ の場合には非凸となり得ることを具体的な例により示す．以下の一対比較行列 A と，二つの重要度 x, y を考える．

$$A=\begin{pmatrix}1&1&4&9\\1&1&7&5\\1/4&1/7&1&4\\1/9&1/5&1/4&1\end{pmatrix},$$

$$x=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}7\\6\\2\\1\end{pmatrix},y=\frac{1}{34}\begin{pmatrix}10\\20\\3\\1\end{pmatrix}$$

重要度 x, y はそれぞれパレート最適であり，これらはグラフ $G(x)$, $G(y)$ が強連結となることから確かめられる．

ここで $\lambda=16/50$ とし，x と y との凸結合 z

$$z=\lambda x+(1-\lambda)y=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}17\\26\\5\\2\end{pmatrix}$$

を考えると，グラフ $G(z)$ は頂点 1 から出る枝が存在せず強連結でなくなるためパレート最適ではない．この一対比較行列 A は CI 値が 0.086 の整合性の高い行列であるが，パレート最適な領域は非凸である．

参考文献

[1] R. Blanquero, E. Carrizosa, E. Conde (2006), *Mathematical Methods of Operations Research*, **64**(2) 271–284.

[2] Choo, E.U., Wedley, W.C. (2004), *Computers & Operations Research*, **31**(6), 893–908.

[3] Saaty, T.L. (1980), *The Analytic Hierarchy Process,* McGraw Hill, New York.