日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

総当たりリーグ戦における carry-over effect 値最小化の検討

筑波大学　*三井駿輝　MITSUI Toshiki
01206770　筑波大学　繁野麻衣子　SHIGENO Maiko

1.　はじめに

本研究では総当たりリーグ戦 (single round-robin tournament) のスケジュールを考える．総当たりリーグ戦の対戦表作成で最もよく知られている方法に, Kirkman の circle method があり，偶数個のチーム $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ に対して, ラウンド $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ の対戦集合を

$$\{(0, r)\} \cup \{(i, j) \mid 1 \le i, j \le n-1, i, j \ne r, \\ i + j = 2r \pmod{n-1}\}$$

で与える．Kirkman の circle method は, 図 1 のようなベースマッチングを構築し, 円周上のチームを 1 つずつ反時計回りにずらすことに等しい．

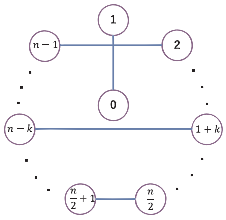

図 1: チーム数 n の circle method のベースマッチング

対戦相手の直前対戦チームによる影響を, carry-over effect (coe) という．対戦表 x に対して $a_{ij}(x)$ は, 対戦相手 i の直後に対戦相手 j が現れる回数を表すとする．ただし, 対戦表が繰り返し使われる可能性を考慮し, ラウンド $n-1$ の直後にラウンド 1 があると仮定する．n チームの総当たりリーグ戦の対戦表 x に対する coe 値は

$$v_{coe}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (a_{ij}(x))^2$$

と定義される．

本研究では, coe 値が最小となる対戦表を求める問題に対し, いくつかの初期対戦表の作成方法を提案し, それらに対して整数計画問題で最適なラウンド入れ替えを行うアルゴリズムを提案する．

2.　circle method に基づいた方法

Kirkman の circle method は, 規則性があるために, coe 値は最悪となるが, ラウンドの入れ替えを行うことで coe 値が小さくなる．例えば, 8 チームの対戦表では 196 から 96 に改善が可能である．このラウンドの入れ替えは整数計画問題 (IP) で解く．

さらに, Cao ら [1] のように図 1 のベースマッチングの与え方を変えることで初期の対戦表を変更して coe 値を求める．対戦表が作成可能なベースマッチングの特徴を利用してチーム数が少ないときのベースマッチングを全列挙して最小 coe 値を求めた結果を既存研究の結果と比較し，表 1 に示す．

表 1: 最小 coe 値の既存研究との比較 (cm:Kirkman の circle method, bm: ベースマッチング全列挙)

チーム数	Guedes ら [2]	Cao ら [1]	cm+IP	bm+IP
8	56	56	96	56
10	108	108	136	108
12	160	176	192	176
14	254	234	254	234
16	240	240	320	-
18	-	340	402	-
20	-	380	490	-
22	-	462	586	-
24	-	598	690	-

3.　binary factorization に基づいた方法

Urrutia ら [3] は, チームを 2 個の集合に分割し, それぞれの集合内で Kirkman の circle method を適用, その後, チーム集合を跨いで対戦をする binary factorization を提案している．例として, チーム数 8 の binary factorization を図 2 に示す．Urrutia ら [3] は，チーム数が 4 の倍数のときを対象としているが，ダミーのチームを用いることで，チーム数が偶数であれば適用できるように拡張する．例として, チーム数 6 の binary factorization を図 3 に示す．

さらに，チーム数によっては, チームを 4 個以上の集合に分割しスケジュールを作成することも可能である．以下にこの N-nary factorization を示す．

- チーム数 Nn' : n' チームずつの N 分割 (N は偶数)
- $M_{n';A}(r)$: $\{0, \ldots, n'-1\}$ チームに対して，方法 A で得られた r ラウンド目の対戦集合
- $M_{N;A'}(k)$: $\{V^1, \ldots, V^N\}$ チーム集合に対して，方法 A' で得られた k 番目の分割したチーム集合のペアの集合

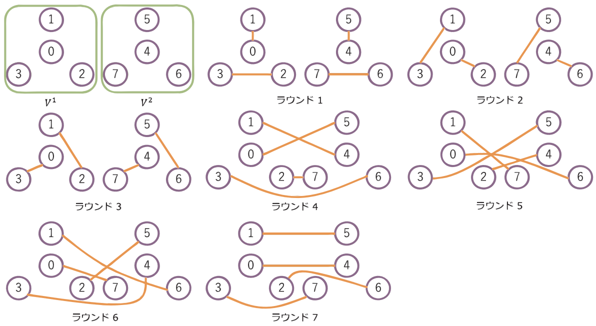

図 2: チーム数 8 の binary factorization

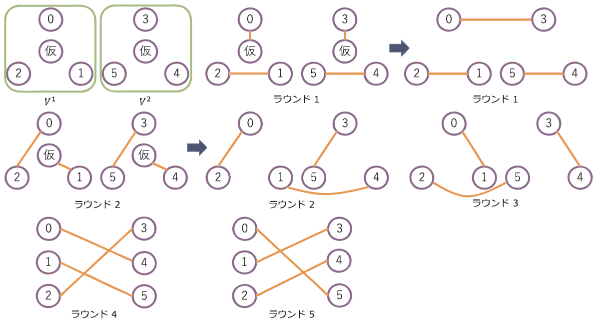

図 3: チーム数 6 の binary factorization

N-nary factorization (n' は 2 で割り切れる場合)

1º チームを N 個の集合 $V^k = \{v_0^k, v_1^k, \ldots, v_{n'-1}^k\}$ $(k \in \{1,\ldots,N\})$ に分割.

2º ラウンド $r \in \{1,\ldots,n'-1\}$ の対戦：チーム集合 V^k 内で $M_{n';A}(r)$ を適用し，スケジュールを作成.

$$\{(v_i^k, v_j^k) \mid (i,j) \in M_{n';A}(r), k \in \{1,\ldots,N\}\}$$

3º ラウンド $k(n'-1)+r$ $(k \in \{1,\ldots,N-1\}, r \in \{1,\ldots,n'-1\})$ の対戦：ラウンド r での対戦相手を $(p,q) \in M_{N;A'}(k)$ で，V^p と V^q で入れ替え.

$$\{(v_i^p, v_j^q)(v_i^q, v_j^p) \mid (i,j) \in M_{n':A}(r), (p,q) \in M_{N;A'}(k)\}$$

4º ラウンド $N(n'-1)+k$ $(k \in \{1,\ldots,N-1\})$ の対戦：

$$\{(v_i^p, v_i^q) \mid i \in \{0,\ldots,n'-1\}, (p,q) \in M_{N;A'}(k)\}$$

N-nary factorization (n' は 2 で割り切れない場合)

1º チームを N 個の集合 $V^k = \{d^k, v_1^k, v_1^k, \ldots, v_{n'}^k\}$ $(k = 1,\ldots,N)$ に分割.（d^k はダミーチーム.）

2º ラウンド $r \in \{1,\ldots,n'-1\}$ の対戦：チーム集合 V^k 内で $M_{n'+1:A}(r)$ を適用し，スケジュールを作成. ダミーチーム d^k と対戦するチーム $v_{m(0)}^k$ は，チーム集合を跨いで対戦.

$$\{(v_i^k, v_j^k) | (i,j) \in M_{n'+1:A}(r), i,j \neq 0, k \in \{1,\ldots,N\}\}$$
$$\cup \{(v_{m(0)}^p, v_{m(0))}^q) | (p,q) \in M_{N,A'}(N-1)\}$$

3º ラウンド $kn'+r(k \in \{1,\ldots,N-2\}, r \in \{1,\ldots,n'\})$ の対戦：ラウンド r での対戦相手を $(p,q) \in M_{N;A'}(k)$ で V^p と V^q で入れ替え.

$$\{(v_i^p, v_j^q) | (i,j) \in M_{n'+1:A}(r), i,j \neq 0, k \in \{1,\ldots,N\},$$
$$(p,q) \in M_{N,A'}(k)\} \cup \{(v_{m(0)}^p, v_{m(0))}^q) | (p,q) \in M_{N,A'}(k)\}$$

4º ラウンド $(N-1)n'+r(r \in 1,\ldots,n'-1)$ の対戦：

$$\{(v_i^p, v_j^q) | i \in \{1,\ldots,n'\}, j = i + r \bmod n',$$
$$(p,q) \in M_{N;A'}(N-1)\}$$

方法 A, A' ともに Kirkman の circle method を用いて初期スケジュールを N-nary factorization で作成し，ラウンド割り当て IP モデルを適用して coe 値最小化問題を解いた結果を表 2 に示す. なお，$N = 8$ において，n' が 2 で割り切れないときにラウンド $(N-2)n'+r$ でも 4º を適用する方法を修正 of とよぶ．チーム数 24 では，既存研究よりも小さい coe 値が得られた.

表 2: 最小 coe 値の既存研究との比較 (bf:binary factorization($N = 2$), qf: $N = 4$, sf: $N = 6$, of: $N = 8$)

チーム数	[2]	[1]	bf+IP	qf+IP	sf+IP	of+IP	修正 of+IP
8	**56**	**56**	**56**	**56**	-	-	-
10	**108**	**108**	134	-	-	-	-
12	**160**	176	180	168	180	-	-
14	254	**234**	246	-	-	-	-
16	**240**	**240**	320	**240**	-	320	-
18	-	**340**	376	-	424	-	-
20	-	**380**	500	460	-	-	-
22	-	**462**	562	-	-	-	-
24	-	598	708	616	616	608	**584**

参考文献

[1] Y. Cao, W. Wu, M. Yagiura. A metaheuristic algorithm for the carry-over effect value minimization problem in round-robin tournaments. J. Adv. Mech. Des. Syst. Manuf., 16 (4), JAMDSM0042, 2022.

[2] A.C.B. Guedes, C.C. Ribeiro. A heuristic for minimizing weighted carry-over effects in round robin tournaments. J. Sched., 14(6), 655-667, 2011.

[3] S. Urrutia, D.de Werra, T. Januario. Recoloring subgraphs of K_{2n} for sports scheduling. Theor Comput Sci, 877, 36-45, 2021.