日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

巡回トーナメント問題における移動回数最小化

中央大学　*小野隆規　ONO Takaki
中央大学　 今堀慎治　IMAHORI Shinji

1.　序論

スポーツ競技における対戦順序, 競技施設の割当などをうまく決定し, 質の良いスケジュールを作成する分野はスポーツスケジューリングと呼ばれる. スポーツによりスケジュールの組み方には様々な形式があるが, 本研究で扱う巡回トーナメント問題 (Traveling Tournament Problem: TTP) は二重総当たりリーグ戦という形式で行うスポーツに対して, 各チームの移動距離の総和の最小化を目的とした組合せ最適化問題である.

本研究では, 藤原ら [1] によって提案された構築型アルゴリズムのアイデアをもとに, TTP の移動回数を最小化する.

2.　用語定義

本研究では, 総当りリーグ戦, 二重総当りリーグ戦の二種類のスケジュールを扱う. 総当りリーグ戦とは, 全 n チームが各ラウンドに 1 戦ずつ行うことを $n-1$ ラウンド繰り返すことで他の全てのチームと対戦するリーグ戦である. 一方, 二重総当りリーグ戦は, 各チームが自チームの拠点と相手チームの拠点で 1 度ずつ試合を行う形式で開催されるリーグ戦のことである. 本研究では, 総当りリーグ戦においてもどちらかの拠点で対戦を行うこととする.

自身の拠点で行う試合をホームゲーム, 相手の拠点で行う試合をアウェイゲームといい, ホームゲームまたはアウェイゲームを k ラウンド連続して行う部分を長さ k のツアーと呼ぶ. また, チーム t がラウンド $r-1$, r でどちらもホームゲームあるいはどちらもアウェイゲームを行うとき, チーム t はラウンド r にブレークを持つという. スケジュール S における各チームのブレークを持つラウンド数をそのチームのブレーク数, 各チームのブレーク数の総和をスケジュール S のブレーク数と定義する.

R ラウンドからなるスケジュールにおける, あるチームのホームアウェイパターンとは, ‘H’ と ‘A’ からなる長さ R の配列で, ‘H’ はホームゲーム, ‘A’ はアウェイゲームを行うことを表す. 例えば, あるチームのホームアウェイパターン HAAHH は, そのチームがラウンド 1, 4, 5 でホームゲームを, ラウンド 2, 3 でアウェイゲームを行うことを示す.

総当りリーグ戦, 二重総当りリーグ戦のスケジュールにおいて, 各チームが各ラウンドに自チームの拠点で対戦するか否かを表す表をホームアウェイテーブル (HAT) と呼ぶ.

3.　問題定義

TTP は入力として, 各チームの拠点間の距離行列 D が与えられ, 以下の条件を満たす各チームの移動距離の総和が最小な二重総当りリーグ戦スケジュールを求める問題である.

- ツアーの長さはどれも 3 を超えない (AtMost 制約)
- 同じ対戦相手と連続するラウンドで対戦しない (NoRepeater 制約)

特に, 各チームの拠点間の距離が全て 1 である TTP を Constant Distance Traveling Tournament Problem (CDTTP) という. このとき CDTTP の目的関数は, TTP における各チームの移動回数の総和と等しい.

4.　スケジュール構築法

4.1.　既存手法

藤原ら [1] によって提案された構築法では, まず条件を満たすブレーク数最小の総当りリーグ戦スケジュール X を一つ求め, X からブレーク数最大の総当りリーグ戦スケジュール X' を構築する. 最後に, X' から二重総当りリーグ戦スケジュール Y を構築する.

X を次の条件を満たす総当りリーグ戦スケジュールとする.

(C1) ブレーク数 $B(X) = n-2$.

(C2) $n \in \{0,1\} \mod 3$ のとき, どのチームもラウンド $r \equiv 1 \mod 3$ でブレークを持たない. $n \equiv 2 \mod 3$ のとき, どのチームもラウンド $r \equiv 0 \mod 3$ でブレークを持たない.

まず, X を整数最適化ソルバーを用いて求める.

次に, 総当りリーグ戦スケジュール X の偶数ラウンドのホームとアウェイを反転することで X' を構築する.

最後に, X' から二重総当りリーグ戦スケジュール Y を次のように構築する.

$n \equiv 0 \mod 3$ のとき, $i \in \{1, 2, \ldots, (n/3) - 1\}$ について, X' の $(3i-2, 3i-1, 3i)$ の 3 ラウンドの部分スケジュールを X'_i とし, X' の $(n-2, n-1)$ の 2 ラウンドの部分スケジュールを $X'_{n/3}$ とする.

$n \equiv 1 \mod 3$ のとき, $i \in \{1, 2, \ldots, (n-1)/3\}$ について, X' の $(3i-2, 3i-1, 3i)$ の 3 ラウンドの部分スケジュールを X'_i とする.

$n \equiv 2 \mod 3$ のとき, $i \in \{2, 3, \ldots, (n-2)/3\}$ について, X' の $(3i-3, 3i-2, 3i-1)$ の 3 ラウンドの部分スケジュールを X'_i とし, X' の $(1, 2)$ の 2 ラウンドの部分スケジュールを X'_1, $(n-2, n-1)$ の 2 ラウンドの部分スケジュールを $X'_{(n+1)/3}$ とする.

部分スケジュール X'_i のホームとアウェイを反転した部分スケジュールを $\overline{X'_i}$ として, 二重総当りリーグ戦スケジュール Y を

$$Y = (X'_1, \overline{X'_1}, X'_2, \overline{X'_2}, X'_3, \overline{X'_3}, \ldots)$$

と構築する. 前述の規則で総当りリーグ戦スケジュールを部分スケジュールに分割し, ホームとアウェイを反転した部分スケジュールと交互に繰り返すことで二重総当りリーグ戦を構築する方法を, 本論文ではブロックミラーリングと呼ぶ.

このとき, Y の移動回数 $D(Y)$ について

$$D(Y) = \begin{cases} (4/3)n^2 - (1/2)n - 1 & (n \equiv 0 \mod 3) \\ (4/3)n^2 - (5/6)n - 1 & (n \equiv 1 \mod 3) \\ (4/3)n^2 - (1/6)n - 1 & (n \equiv 2 \mod 3) \end{cases}$$

が成り立つ. $n \equiv 1 \mod 3$ のとき, $D(Y)$ は自明な下界と一致し, $n \in \{0, 2\} \mod 3$ のとき, 自明な下界より $n/2 - 1$ だけ大きい. よって提案手法では, $n \in \{0, 2\} \mod 3$ について考える.

4.2. 提案手法

任意のチームのホームアウェイパターンに対して, ホームとアウェイを反転したホームアウェイパターンを持つチームが存在するような HAT を, ホームアウェイパターン対からなる HAT という.

提案手法では, まず条件を満たす総当りリーグ戦スケジュール V を一つ求め, V から二重総当りリーグ戦 W を構築する. V を次の条件を満たす総当りリーグ戦スケジュールとする.

(D1) ホームアウェイパターン対からなる HAT を持つ.

(D2) 1 チームが全てのラウンドでホームゲームを行う.

(D3) $n \equiv 0 \mod 3$ のとき, $n/6$ チームが最初から $r \equiv 0 \mod 6$ ラウンド連続でホームゲームを行い, その後 HHAHHA$\cdots$HHAHH を行う. $n \equiv 2 \mod 3$ のとき, $n/6$ チームが最初から $r \equiv 2 \mod 6$ ラウンド連続でホームゲームを行い, その後 HHAHHA$\cdots$HHAHH を行う.

(D4) $n \equiv 0 \mod 3$ のとき, 条件 **(D3)** を満たさないチームはラウンド 1 を除くラウンド $r \equiv 1 \mod 3$ で必ずブレークを持つ. $n \equiv 2 \mod 3$ のとき, 条件 **(D3)** を満たさないチームはラウンド $r \equiv 0 \mod 3$ で必ずブレークを持つ.

まず, V を整数最適化ソルバーを用いて求める. なお, このような V は $n \leq 90$, $n \in \{0, 2\} \mod 3$ を満たす任意の偶数 n について存在することが確認できた. 次に, 既存手法と同様にブロックミラーリングで V から W を構築する.

このとき, W の移動回数 $D(W)$ について

$$D(W) = \begin{cases} (4/3)n^2 - (2/3)n - 1 & (n \equiv 0 \mod 3) \\ (4/3)n^2 - (1/3)n - 2/3 & (n \equiv 2 \mod 3) \end{cases}$$

が成り立つ.

5. まとめと今後の課題

$n \in \{0, 2\} \mod 3$ のとき, 既存手法より移動回数が少ないスケジュールの構築ができた. V が存在するかわかっていないこと, もし存在するならより効率的な構築が今後の課題である.

参考文献

[1] N. Fujiwara, S. Imahori, T. Matsui and R.Miyashiro. Algorithms for the constant distance traveling tounament problem. Lecture Notes in Computer Science, vol. 3867, pp. 135-146, 2007.