

配置候補点および需要点が多角形に限定された ミニサム型の複数施設配置問題とその解法

申請中 慶應義塾大学大学院 *平岡佑樹 HIRAOKA Yuki
01308990 慶應義塾大学 田中健一 TANAKA Ken-ichi
01107680 慶應義塾大学 栗田 治 KURITA Osamu
01406032 慶應義塾大学 成島康史 NARUSHIMA Yasushi

1. はじめに

ドローンなどの直線距離でサービスを提供できる主体を対象とし、海上の離島などが存在する非連結な空間において、複数の施設の最適な配置位置を求める問題を提案する。モデル化に際し、(1) 施設配置候補点は島の周および内部に存在する、(2) 需要点は島の周および内部に一樣かつ連続的に分布する、(3) 需要点は最寄り施設に割り当てられる、と仮定する。評価尺度として、平均距離と平均 2 乗距離を考える。平均距離は施設から需要点までの移動の効率性を表し、平均 2 乗距離はより遠方の需要点までの移動コストを重視した指標である。

Suzuki and Okabe [2] は、連続な需要分布を仮定した様々な施設配置問題に対し、ボロノイ図を用いた解法を提案した。これらの解法は、需要点が凸領域内に分布する状況を前提としており、非凸な領域への拡張は十分な研究がなされていない。Wei et al. [3] は、非凸な領域を対象とした施設配置問題と解法を提案しているが、ミニマックス型の問題を扱っている。本研究では、ミニサム型の複数施設配置問題に対して、平均距離および平均 2 乗距離最小化モデルとその解法を提案する。

2. モデルと解法

m 個の多角形 $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ に配置候補点および需要点が限定されており、 q 個の施設 $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$ を $\mathcal{P}$ 内に配置する状況を想定する (図 1)。以下の記号を導入する:

x_j : 施設 $F_j \in \mathcal{F}$ の座標 (u_j, v_j) , $j = 1, 2, \dots, q$
 $z = (u_1, v_1, \dots, u_q, v_q)$: 施設 $F_1, \dots, F_q$ の座標からなる $2q$ 次元の変数ベクトル

V_j : 施設 F_j を母点とするボロノイ領域

$\mathcal{P}'_j$: V_j に属する多角形の集合 ($\mathcal{P}'_j = V_j \cap \mathcal{P}$)

以降では、平均距離最小化問題を P1, 平均 2 乗距離最小化問題を P2 とよぶ。Suzuki and Okabe [2]

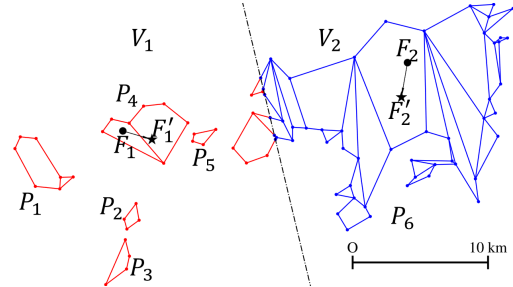


図 1: 状況設定および解の更新の様子 ($q = 2$)

では、ボロノイ図を用いた、配置と割当を交互に改良する発見的解法が提案されている。本研究では、この枠組みを、配置候補点および需要点が多角形に限定された状況に適用できるように拡張する。P1 に対する提案解法は以下の通りとなる:

Algorithm 1 P1 に対する発見的解法

Input: 多角形集合 $\mathcal{P}$

Output: 問題 P1 の局所最適解

- 1: $\mathcal{P}$ を凸多角形の集合に分割する。 $i = 0$ とおく。
- 2: $\mathcal{P}$ 内にランダムな初期点を q 個生成し、対応する変数ベクトルを $z^{(i)}$ とする。
- 3: $z^{(i)}$ に対応する F_j ($j = 1, \dots, q$) のボロノイ領域 $V_j(z^{(i)})$ ($j = 1, \dots, q$) を作成する。
- 4: $j = 1, \dots, q$ について、 $\mathcal{P}'_j$ 内の点を対象需要点とし、配置候補地を $\mathcal{P}'_j$ 内の点に限定した、1-median 問題を解き、それら q 個の解を並べたベクトルを $z^{(i+1)}$ とおく。
- 5: $z^{(i+1)}$ が $z^{(i)}$ と十分近ければ終了。そうでなければ $i := i + 1$ としてステップ 3 へ。

ステップ 4 における、1-median 問題の解法を説明する。施設 F_j に対する 1-median 問題の目的関数は、 $\mathcal{P}'_j$ を三角形分割し、分割された各三角形内の平均距離を計算すれば求められる。各三角形に

対する平均距離は、栗田 [1] により解析的に求められている。1-median 問題の目的関数は、各三角形の平均距離を、その面積による重み付け和として表現できる。この平均距離は、施設位置 (u_j, v_j) に対する凸関数である。一方、1-median 問題の配置候補地は、 P'_j 内の点集合である。この点集合は、ステップ 1 で分割された各凸多角形とボロノイ領域 V_j との共通集合であり、凸多角形の集合となる (図 1)。上記の 1-median 問題において、 P'_j を構成する各凸多角形に、配置候補地を限定した問題は、凸多角形内の凸関数最小化問題であるため、凸計画問題である。したがって、 P'_j 内の各凸多角形 (図 1 の P'_1 の例では 10 個) においてこの凸計画問題を解き、最も平均距離が小さくなる点を求めることで、1-median 問題の最適解が得られる。

次に、P2 の発見的解法を説明する。P2 のアルゴリズムの全体の流れは P1 と同様である。一方、Algorithm 1 のステップ 4 における、施設 F_j に対する最小解は、平均 2 乗距離の場合には簡潔に求められる。1 施設の配置問題に関する平均 2 乗距離は、解析的に表現でき、その等高線は円となる (図 2)。さらに、配置候補地の制約を無視した問題は、円の中心で最小値を取る。円の中心は、 P'_j 内の各多角形の重心を、その面積で重み付けした点となる。以上より、円の中心が P'_j 内にあるときは、それが最小解となる。そうでない場合には、中心から P'_j 上の最寄り点を求めればよく、点と線分との最小距離を求める問題に帰着される (そのため Algorithm 1 のステップ 1 は不要である)。

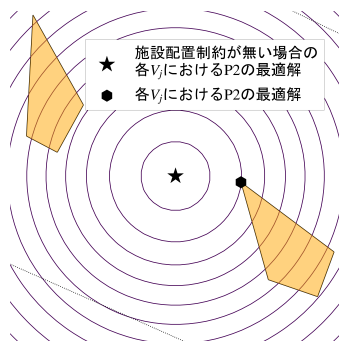


図 2: P2 における 1 施設の配置問題の解法

3. 数値例

図 3 は、香川県西部の離島の境界を多角形近似した例である。提案手法を Python を用いて実装

し、 $q = 4$ において得られた P1 と P2 の最良解とボロノイ領域を示している。P1 の 1-median 問題は、準ニュートン法により解いた。これらの最良解は、それぞれ異なる 100 個の初期配置から得られたものである。図 3 から P2 の解は P1 の解と比較して、解が多角形の周付近に多く出現していることが分かる。これは、P2 では P'_j 内の需要点の重心に近づこうという力が働いているためであり、それゆえ、解がより遠方の需要点に配慮した配置になっている。また、表 1 は図 3 の P1 と P2 の各解における評価尺度の値を示している。目的関数値に 10% 程度の差異があることが分かる。

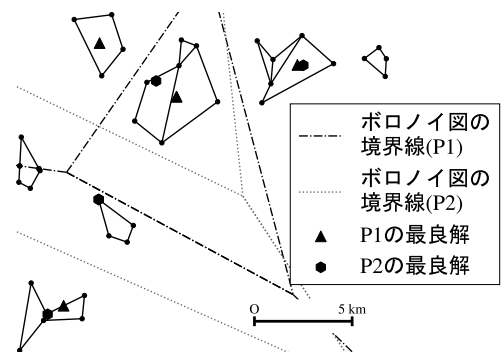


図 3: P1 と P2 の解の比較 ($q = 4$)

表 1: 平均距離と 2 乗距離の解の評価

	平均距離 [km]	平均 2 乗距離 [km^2]
P1	1.809	6.048
P2	2.012	5.395

参考文献

- [1] 栗田治: 都市と地域の数理モデル (共立出版, 2013).
- [2] Suzuki, A. and Okabe, A. (1995): Using Voronoi Diagrams. In Drezner, Z. (ed.): *Facility Location: A Survey of Applications and Methods*, (Berlin, Springer), pp. 103–118.
- [3] Wei, H., Murray, A.T. and Xiao, N. (2006): Solving the continuous space p-center problem: planning application issues. *IMA Journal of Management Mathematics*, Vol. 17, pp. 413–425.