日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

分布的ロバスト最適化に基づく安全な経路選択問題について

申請中　慶應義塾大学　*土屋佑太　TSUCHIYA Yuta
01406032　慶應義塾大学　成島康史　NARUSHIMA Yasushi

1. はじめに

交通事故は毎年頻発しており，走行車両の中には，石油やガスなどの危険物を輸送する車両も含まれる．このような危険物輸送車が交通事故に遭った場合には，甚大な被害をもたらす恐れがあることから，リスク回避的な経路選択は重要な問題である．安全な経路選択問題においては，事故率や事故被害といった重要なデータがあるが，これらのデータは不確実性を持っているために，正確なリスクの把握が困難である．Toumazis and Kwon[1] は，事故率や事故被害などのパラメータの不確実性に着目したロバスト安全経路モデルを提案しているが，分布の不確実性を考慮していない．分布ロバスト最適化という手法を用いた経路モデルには [2] があるが，Wang et al.[2] のモデルは最短経路モデルであり，安全面は考慮していない．

したがって本研究では，安全経路問題において重要な因子となる交通量を用いて事故率や事故被害を定義し，交通量の 2 乗 (確率変数) の従う確率分布に対して不確実性を考慮し，分布的ロバスト最適化の観点から安全経路問題にアプローチする．確率変数の従うサポート集合として楕円体型，リスク指標としてコヒーレント性を有する CVaR(Conditional Value-at-Risk) を用い，このリスクを最小化する分布的ロバストな安全経路モデルを提案する．提案モデルでは，交通量を考えることで，交通量によって定義される様々な要素を同じ分布で扱うことができる柔軟性を持つ．

分布的ロバスト最適化は，想定する確率分布の不確実性を考慮した最適化問題であり，確率分布の不確実性集合を D とすると，$\min_x \max_{F\in D} E_F[f(x,\xi)]$ で表される．ここで，$x\in\mathbb{R}^m$ は決定変数ベクトル，$\xi\in\mathbb{R}^m$ は確率変数ベクトルであり，$E_F[f(x,\xi)]$ は確率分布 F のもとでの f の期待値を表す．リスク尺度として扱う CVaR は確率水準を $\alpha\in(0,1)$，VaR を r とすると，以下のように表される．

$$CVaR_\alpha = \min_r r + \frac{1}{\alpha}E_F[[\xi^T x - r]^+] \qquad (1)$$

ここで，$[\cdot]^+ = \max\{\cdot,0\}$ である．

2. 定式化

本研究では，道路ネットワークを重み付き有向グラフとして扱う．頂点集合 V と辺集合 A を持つ有向グラフ $G=(V,A)$ を考える $(|V|=n, |A|=m)$．$\xi=\{\xi_{ij}:(i,j)\in A\}$ を辺 (i,j) の重みである確率変数をまとめた確率変数ベクトル，$x=\{x_{ij}:(i,j)\in A\}$ を辺 (i,j) を通るか否かの二値の決定変数をまとめた決定変数ベクトルとする．本モデルでは，リスクを「事故率」×「事故被害」によって定義し，辺 (i,j) の事故率 p_{ij} は $p_{ij}=l_{ij}\times\mu\eta_{ij}$，事故被害 c_{ij} は $c_{ij}=2\pi\eta_{ij}/l_{ij}$ と定義する．ここで，l_{ij} は辺 (i,j) の長さ，η_{ij} は辺 (i,j) の交通量，μ は p_{ij} の傾き，π は事故の影響範囲である．したがって辺 (i,j) のリスク d_{ij} は $2\pi\mu\eta_{ij}^2$ となる．本モデルでは，η_{ij}^2 を ξ_{ij} とおき，$2\pi\mu\xi_{ij}$ を辺 (i,j) のリスクとして扱う．この d_{ij} を CVaR(1) におけるリスクとすると，本研究で扱うリスク CVaR 最小化モデルは，以下のようになる．

$$\min_{x,r} \quad r + \frac{1}{\alpha}E_F[[2\pi\mu\xi^T x - r]^+], \qquad (2a)$$

$$st \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji}, = \begin{cases} 1, & i=\text{始点}, \\ -1, & i=\text{終点}, \ \forall i\in V, \\ 0, & i=\text{その他}, \end{cases} \qquad (2b)$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\ \forall (i,j)\in A. \qquad (2c)$$

制約式 (2b) は，フロー保存則を意味する，問題 (2) において，ξ の従う分布に対して不確実性を考慮し不確実性集合を D とすると，最悪状況下での CVaR を考えた分布的ロバストなリスク CVaR 最小化モデルは以下のようになる．

$$\min_{x,r} \quad r + \frac{1}{\alpha}\sup_{F\in D} E_F[[2\pi\mu\xi^T x - r]^+], \qquad (3)$$
$$st. \quad (2b) \quad and \quad (2c).$$

問題 (3) の不確実性集合 D は分布 F と経験分布 F_N との距離を用いて表すことができ，本研究では分布

間の距離を表す指標として Wasserstein 距離を用いる．また，経験分布はサンプルデータ $\{\hat{\xi}^k\}_{k\in[N]}$ によって構成されるものとし，サンプル数を N とする．また，以下では，$[N]=\{1,2,\cdots,N\}$ とする．

定義 1 不確実性集合 D は，分布間の距離を表す Wasserstein 距離 d_w を用いた球として以下のように定義する：

$$D=\{F\in M(\Xi):d_w(F_N,F)\leq\epsilon\}. \tag{4}$$

ここで，Ξ は確率変数 ξ の集合，$M(\Xi)$ は Ξ によってサポートされる確率分布の集合，$\epsilon\geq 0$ は不確実性集合の半径を表す．

仮定 1 経験分布は $F_N(\xi)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{\{\hat{\xi}^k\leq\xi\}}$ で表されるものとする．ここで，$\mathbf{1}_A$ はイベント A の指示関数である．

次に，問題 (3) を求解可能な形式にするために，部分問題 $\sup\limits_{F\in D} E_F[[2\pi\mu\xi^T x-r]^+]$ の再定式化を行う．そのために，ここで以下を仮定する．

仮定 2 任意の分布 $F\in M(\Xi)$ に対して，以下が成立する：

$$\int_{\Xi}||\xi||_p F(d\xi)<\infty.$$

仮定 3 仮定 2 が満たされるとき，不確実性集合を構成する Wasserstein 距離 d_w は以下のように定義されるとする [2]：

$$d_w(F_N,F)=\inf\Big\{\int_{\Xi\times\Xi}d(\hat{\xi},\xi)K(d\hat{\xi},d\xi):$$
$$\times\int_{\Xi}K(\hat{\xi},d\xi)=F_N(\hat{\xi}),\int_{\Xi}K(d\hat{\xi},\xi)=F(\xi)\Big\}.$$

ここで $K:\Xi\times\Xi\rightarrow\mathbb{R}_+$ は $F_N\in M(\Xi)$ と $F\in M(\Xi)$ の結合確率分布であり，$d(\hat{\xi},\xi)=||\hat{\xi}-\xi||_p$ である．$||\cdot||$ は $\mathbb{R}^n$ 上の l_p ノルムを表し，本研究では 2 ノルムを採用する．

不確実性集合 D として，Wasserstein 球 (4) を考慮すると問題 (3) の部分問題 $\sup\limits_{F\in D} E_F[[2\pi\mu\xi^T x-r]^+]$ は，以下のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned}\max_{K(\xi,\hat{\xi})\geq 0}\quad & \int_{\Xi}\sum_{k=1}^{N}h(x,r,\xi)K(d\xi,\hat{\xi^k}), \\ st.\quad & \int_{\Xi}K(d\xi,\hat{\xi^k})=\frac{1}{N},\quad \forall k\in[N], \\ & \int_{\Xi}\sum_{k=1}^{N}d(\xi,\hat{\xi^k})K(d\xi,\hat{\xi^k})\leq\epsilon.\end{aligned} \tag{5}$$

ただし $h(x,r,\xi)=[2\pi\mu\xi^T x-r]^+$ とする．ここで問題 (5) に対して，サポート集合 Ξ の情報を組み込む．サポート集合の構造について，本研究では楕円体型を採用することとし，$\Xi=\{\xi|\xi=\bar{\xi}+Q\Delta,||\Delta||_2\leq\Omega\}$ とする．ここで，$\bar{\xi}\in\mathbb{R}^m,\Delta\in\mathbb{R}^m$ はベクトル，$Q\in\mathbb{R}^{m\times m}$ は正定値対称行列，Ω は正の定数である．問題 (5) の双対問題を考えると，問題 (3) は以下の様に再定式化される：

$$\begin{aligned}\min_{x,r,v_k,\lambda,\rho_k,z_k}\quad & r+\frac{1}{\alpha}\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}v_k+\lambda\varepsilon\}, \\ st.\ & z_k^T b_k+2\pi\mu\bar{\xi}^T x-r+\rho_k\Omega\leq v_k,\ \forall k\in[N], \\ & c_k+A^T z_k=0,\ \forall k\in[N], \\ & z_k\in\mathcal{K}^{1+m}\times\mathcal{K}^{1+m},\ \forall k\in[N], \\ & \lambda\geq 0, \\ & v_k,\rho_k\geq 0,\ \forall k\in[N], \\ & (2b)\quad and\quad (2c).\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，$\mathcal{K}^{1+m}$=$\{z=(z_0,\bar{z})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m|z_0\geq\|\bar{z}\|\}$ を二次錐とする，

$$c_k=\begin{pmatrix}-\rho_k\\ -\lambda\\ 2\pi\mu Q^T x\end{pmatrix},\ b_k=\begin{pmatrix}0\\ \bar{\xi}-\hat{\xi}^k\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \forall k\in[N]$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0^T\\ 0&0&Q\\ 1&0&0^T\\ 0&0&I\end{pmatrix}$$ である．

問題 (6) は，混合 0-1 二次錐計画問題であることに注意しよう．

3. 数値例

数値実験例については，当日発表する．

参考文献

[1] I. Toumazis, and C. Kwon :Worst-case conditional value-at-risk minimization for hazardous materials transportation, Transportation Science, 50 (2016), pp. 1174–1187.

[2] Z. Wang, K. You, S. Song, and Y. Zhang: Wasserstein distributionally robust shortest path problem, European Journal of Operational Research, 284 (2020), pp. 31–43.