平均避難時間最小化フローを用いた緊急避難計画に関する研究

兵庫県立大学　*増田康佑　MASUDA Kosuke
01104684　兵庫県立大学　加藤直樹　KATOH Naoki
05000132　兵庫県立大学　東川雄哉　HIGASHIKAWA Yuya

1.　はじめに

津波等の災害に対する緊急避難計画立案に際して，ネットワークフロー理論に基づく手法の適用が考えられる．特に，各辺に対して移動時間と単位時間あたりの流入量上限が付与された動的ネットワークを用いることで，避難者の時間に沿った移動をフローとして表現できる．動的ネットワークにおける代表的な問題である最速避難問題においては，全ての避難者が避難を完了するために必要な最小時間を求め，さらにそのときの避難者の移動をフローとして得る．

最速避難問題の解は緊急避難計画立案に向けて有用である一方で，避難に最も時間を要する避難者以外の避難時間を考慮していない．そこで本論文では，全ての避難者の平均避難時間を最小化する「平均避難時間最小化フロー」について考察し，その理論的性質や有用性について明らかにする．

2.　準備

この章では本論文で用いるネットワークフロー理論の用語や定義を説明する．なお，$\mathbb{R}$ は実数の集合，$\mathbb{Z}_+$ は非負整数の集合，$\mathbb{R}_+$ は非負実数の集合を表す．

2.1.　動的ネットワーク

最速避難問題では，動的ネットワーク $\mathcal{N} = (D = (V, A), c, \tau, b, S^+, S^-)$ が与えられる．ここで，$D = (V, A)$ は頂点集合 V と辺集合 A からなる有向グラフであり，V は交差点や避難場所，A は道路を表す．避難者は各頂点に配置され，時刻 0 で避難者が存在する頂点の集合をソース集合 $S^+ \subseteq V$，避難所等の逃げ先となる頂点の集合をシンク集合 $S^- \subseteq V$ と呼ぶ．供給量/需要量関数 $b\colon V \to \mathbb{R}$ は，頂点 $v \in V$ が S^+ に含まれる場合は v に存在する避難者数，S^- に含まれる場合は v に避難可能な人数に -1 を乗じた数を返す．また，各辺 $a \in A$ に対して，辺容量関数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$ は単位時間あたりに a に流入可能な人数の上限を，移動時間関数 $\tau\colon A \to \mathbb{Z}_+$ は a の通過にかかる時間を返す．

ここで，動的フロー $f : A \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ を定義する．時刻 $\theta \in \mathbb{Z}_+$ において辺 $a \in A$ に入る避難者数を $f(a, \theta)$ とすると，動的フロー f が実行可能とは，容量制約

$$f(a, \theta) \le c(a) \quad (\forall a \in A,\ \forall \theta \in \mathbb{Z}_+)$$

と流量保存制約

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} \sum_{\theta=0}^{\Theta} f(a, \theta) - \sum_{a \in \delta^-(v)} \sum_{\theta=0}^{\Theta-\tau(a)} f(a, \theta) \le b(v) \qquad (\forall v \in V \setminus S^-,\ \forall \Theta \in \mathbb{Z}_+)$$

を満たし，要求制約

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} \sum_{\theta=0}^{\Theta} f(a, \theta) - \sum_{a \in \delta^-(v)} \sum_{\theta=0}^{\Theta-\tau(a)} f(a, \theta) = b(v) \qquad (\forall v \in V)$$

を満たす $\Theta \in \mathbb{Z}_+$ が存在することをいう．なお，$\delta^+(v)$,$\delta^-(v)$ は，それぞれ v からでていく辺集合，v へと向かう辺集合を表す．実行可能な動的フロー f のうち，要求制約を満たす最小の時刻 Θ^* を最速避難時間と呼び，これを達成するフローを最速流という．

2.2.　静的ネットワークと時間拡大ネットワーク

静的ネットワーク $\mathcal{N} = (D = (V, A), c, S^+, S^-)$ に対し，静的フロー $g : A \to \mathbb{R}_+$ を定義する．静的フロー g が実行可能とは，容量制約

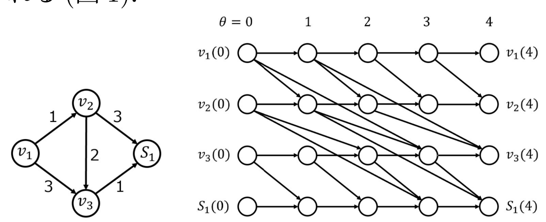
$$0 \le g(a) \le c(a) \quad (\forall a \in A)$$

と，流量保存制約

$$\sum_{a \in \delta^+(v)} g(a) - \sum_{a \in \delta^-(v)} g(a) \begin{cases} \ge 0 & v \in S^+ \\ = 0 & v \in V \backslash (S^+ \cup S^-) \\ \le 0 & v \in S^- \end{cases}$$

を満たすことをいう．実行可能な静的フロー g のうち，ソース集合を出発する総量最大のフローを最大流という．

Ford と Fulkerson[3] によって，動的ネットワーク上の最速避難問題は，時間拡大ネットワークと呼ばれる静的ネットワーク上の最大流問題に帰着されることが示された． 動的ネットワーク $\mathcal{N} = (D = (V, A), c, \tau, b, S^+, S^-)$ および制限時刻 $\Theta \in \mathbb{Z}_+$ に対して，時間拡大ネットワーク $\mathcal{N}(\Theta)$ は $\mathcal{N}$ の各頂点 $v \in V$ について，各時刻 $\theta \in [0, \Theta]$ に対応する頂点 $v(0), v(1), \ldots, v(\Theta)$，また各時刻 $\theta \in [0, \Theta - 1]$ に対応する辺 $(v(\theta), v(\theta + 1))$ を追加し，さらに $\mathcal{N}$ の各辺 $(u, v) \in E$ について各時刻 $\theta \in [0, \Theta - \tau(u, v)]$ に対応する辺 $(u(\theta), v(\theta + \tau(u, v)))$ を追加することにより構築される (図 1).



(a) 動的ネットワーク$\mathcal{N}$　　(b) 時間拡大ネットワーク$\mathcal{N}(4)$

図 1: 動的ネットワークを制限時刻 $\Theta = 4$ で拡大した時間拡大ネットワーク．辺に付した数値は移動時間を表す．

2.3. 普遍的最速流

例えば，津波が短時間で到達するような場合においては，津波到達までに全ての避難者が避難完了するのは困難である．しかし，このような場合においても可能な限り多くの避難者が津波到達までに避難所に到達できるような計画が為されるべきである．そのための理論的枠組みとして，普遍的最速流 [4] が知られており，次のように定義される．実行可能な動的フロー f の集合を F とし，任意の時刻 $\Theta \in Z_+$ および任意の動的フロー $f \in F$ に対して，次の制約を満たすフロー $f^* \in F$ を普遍的最速流と呼ぶ．

$$\sum_{s\in S^-}\sum_{a\in\delta^-(s)}\sum_{\theta=0}^{\Theta-\tau(a)} f^*(a,\theta) \geq \sum_{s\in S^-}\sum_{a\in\delta^-(s)}\sum_{\theta=0}^{\Theta-\tau(a)} f(a,\theta)$$

普遍的最速流は，最速の避難時間を達成しつつ，時刻 0 から避難時間までの間の任意の時刻における避難が完了している累積人数を同時に最大化しており，最速流よりも良い避難を表現している．しかし，避難計画で用いるような，複数のソースと複数のシンクが存在し，かつシンク容量に制限がある一般のネットワークでは普遍的最速流が存在しない例があることが知られている [5]（図 2）．

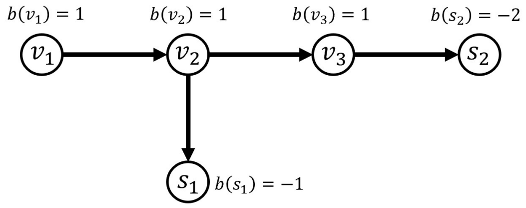


図 2: 普遍的最速流が存在しないネットワーク．各辺の辺容量と移動時間は全て 1.

図 2 のネットワークでは時刻 1 で最大 2 人が避難を完了するフローが存在するが，その場合の避難時間は 3 以上となる．一方で，本ネットワークにおける最速避難時間は 2 である．よって，最速避難時間 2 を達成しつつ，時刻 1 における最大累積人数 2 を同時に達成するフローは存在しない，すなわち普遍的最速流は存在しないことがわかる．

3. 主結果

上述の通り，普遍的最速流は緊急避難を立案する上で有用であるが，一般のネットワークモデルにおいては存在しない場合がある．そこで本論文では，普遍的最速流の代替的なフローとして，「全ての避難者の平均避難時間を最小化」することを最適性の基準とした平均避難時間最小化フローを提案し，その理論的性質について考察する．

最速避難問題では，経時変化しないネットワークにおいて特定の人数を特定の場所まで移動させるというモデルについて考えるため，平均避難時間最小化フローは全員の避難時間の総和である総避難時間を最小化するフローと言い換えられる．このことより，平均避難時間最小化フローを求める問題は，時間拡大ネットワーク上の最小費用流問題に帰着され，以下の定理を得る．

定理 1. 動的ネットワーク $\mathcal{N}$ における平均避難時間最小化フローは，最速避難時間以上のある時刻 θ に対する時間拡大ネットワーク $\mathcal{N}(\theta)$ における避難者全員を流す場合の最小費用流に対応している．

Jarvis と Ratliff[6] はネットワークのソースとシンクがそれぞれ一つのみの場合，普遍的最速流は平均避難時間最小化フローであることを示した．本論文では，[6] の結果を拡張し，ソースとシンクが複数あるかつ，シンク容量に制限がある一般のネットワークにおいても，普遍的最速流が存在する場合については平均避難時間最小化フローと一致することを示した．

定理 2. 動的ネットワーク $\mathcal{N}$ において普遍的最速流が存在するならば，$\mathcal{N}$ における平均避難時間最小化フローと一致する．

4. 今後の課題

本論文では，普遍的最速流の代替的なフローとして平均避難時間最小化フローを提案し，それらの関係を部分的に解明した．得られた結果は，普遍的最速流が存在するための必要十分条件が平均避難時間最小化フローによって説明される可能性を示唆しており，特徴づけの完全解明は今後の課題である．また，普遍的最速流が存在しない場合，平均時間最小化フローがどれほど「良い (あるいは悪い)」フローであるか，その評価方法も含めて今後の課題である．

参考文献

[1] B. Hoppe, and É. Tardos, " The quickest transshipment problem. " In Proceedings of the sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, pp. 512–521, 1995.

[2] M. Schlöter, M. Skutella, and K. Van Tran, " A Faster Algorithm for Quickest Transshipments via an Extended Dis-crete Newton Method. " In Proceedings of the 2022 Annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms, pp. 90–102, 2022.

[3] D.R.Ford and D.R.Fulkerson "Flows in Networks." Princeton University Press, Princeton,1962.

[4] E.Minieka "Maximal, lexicographic and dynamic network flows." Operations Research, 21(2):pp.517-527, 1973.

[5] A.Takizawa, M.Inoue, and N.Katoh "An emergency evacuation planning model using the universally quickest flow." The Review of Socionetwork Strategies, 6:pp.15-28, 2012.

[6] J.J.Jarvis and H.D. Ratliff "Some Equivalent Objectives for Dynamic Network Flow Problems" Management Science, 28(1):pp.106-109, 1982.