配置が 2 列になる長方形ストリップパッキング問題に対する 1.5 近似アルゴリズム

01508160　東京海洋大学　*橋本英樹　HASHIMOTO Hideki
05000218　東京理科大学　胡艶楠　HU Yannan

1. はじめに

長方形ストリップパッキング問題は，与えられた長方形を幅が固定された長方形の容器（ストリップと呼ぶ）に重なりなく詰め込むとき，ストリップの高さをできるだけ小さくする問題である．この問題は古典的な組合せ最適化問題の 1 つで，NP 困難であることが知られており，これまで様々な研究が行われてきた [1].

本論文では，長方形ストリップパッキング問題において，与えられた長方形集合の中の任意の 3 つの長方形の幅の合計がストリップの幅より大きくなる問題を考える．この問題を配置が 2 列になる長方形ストリップパッキング問題と呼ぶ [2]．図 1 に配置例の 1 つを示す．現実での応用としては，トラックの荷台への荷物の効率的な積載などが挙げられる．この問題に対して 1.5 近似アルゴリズムを提案する．

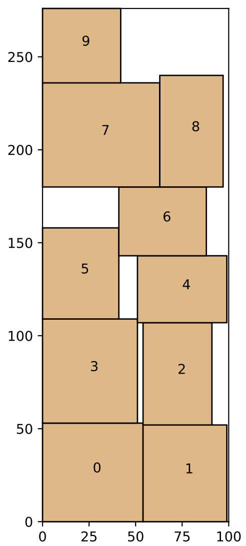

図 1: 3 個の長方形を幅方向に並べて配置できない例

2. 問題

本節では，配置が 2 列になる長方形ストリップパッキング問題（*2SP2C*）について説明する．

長方形ストリップパッキング問題は，与えられた n 個の長方形の集合 $R = \{1, 2, \ldots, n\}$ を幅 W の長方形の容器に重複なく配置するとき，その容器の高さ H をできるだけ小さくする問題である．長方形の回転を考慮して配置する問題を考える場合もあるが，本研究では長方形の回転は考えないものとする．各長方形 $i \in R$ の幅を w_i，高さを h_i とする．また，ストリップの幅方向に 3 つ以上の長方形を配置すると容器の幅を超えてしまう条件 (A):

$$\forall i, j, k \in R, \quad w_i + w_j + w_k > W$$

を仮定する．

2SP2C は，問題例のデータが条件 (A) を満たす長方形の集合を扱う長方形ストリップパッキング問題であり，以下の長方形ストリップパッキング問題の定式化も 2SP2C の一つの定式化である．長方形ストリップパッキング問題を整数計画問題として定式化する．長方形 i の左下の点の座標を (x_i, y_i) とする．長方形 i が j の左にあるとき $u_{ij} = 1$，そうでないときは $u_{ij} = 0$ とする．また，長方形 i が j の下にあるとき $v_{ij} = 1$，そうでないときは $v_{ij} = 0$ とする．これらの変数を用いて長方形ストリップパッキング問題は次のように定式化できる．

$$\begin{aligned}
\min\ & H \\
\text{s.t. } & x_i + w_i \leq x_j + W(1 - u_{ij}), & i, j \in R \\
& y_i + h_i \leq y_j + H_{\mathrm{UB}}(1 - v_{ij}), & i, j \in R \\
& u_{ij} + u_{ji} + v_{ij} + v_{ji} \geq 1, & i, j \in R \\
& 0 \leq x_i \leq W - w_i, & i \in R \\
& 0 \leq y_i \leq H - h_i, & i \in R \\
& u_{ij}, v_{ij} \in \{0, 1\}, & i, j \in R.
\end{aligned}$$

ここで，H_{UB} は H の上界値 (例えば $\sum_{i=1}^{n} h_i$) を設定すれば良い．

3. 問題の性質

2SP2C について，文献 [2] では以下の性質が証明されている．

定理 1. 条件 (A) を満たすとき，各長方形 $i \in R$ に対して，$x_i = 0$ または $x_i = W - w_i$ が成り立つとして一般性を失わない．

定理 1 より，以降では長方形 i に対して $x_i = 0$ または $x_i = W - w_i$ であるとする．

定義 1. 長方形 i に対して $x_i = 0$ （$x_i = W - w_i$）である場合，長方形 i は左側（右側）にあると呼ぶ．

定理 2. *2SP2C は NP 困難である．*

4. 1.5 近似アルゴリズム

提案する近似アルゴリズムを Algorithm 1 に示す．ここで，$R_{\mathrm{wide}} = \{i \in R \mid w_i > W/2\}$, $R_{\mathrm{narrow}} = \{i \in R \mid w_i \leq W/2\}$ とする．このアルゴリズムの計算時間は $O(n)$ である．

Algorithm 1 近似アルゴリム

R_{narrow} の長方形を順番に底辺から左右並列に積む．ただし，長方形は配置する時点で左右の 2 列のうち低い方の列に積むものとする．最後に配置した長方形を $m \in R_{\mathrm{narrow}}$ とする．

R_{wide} の長方形を幅が $W - h_m$ 以下の長方形から順に，長方形 m とは異なる方の列に積む．

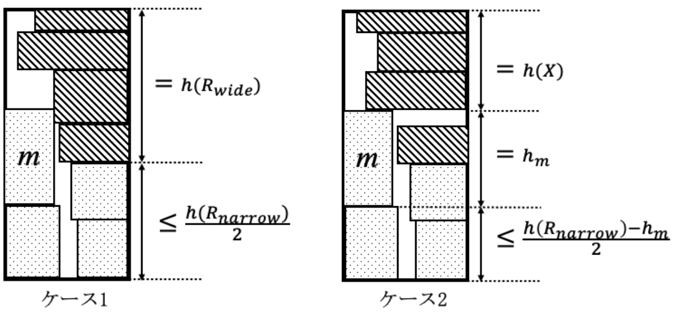

図 2: 長方形 m と R_{wide} の位置関係

定理 3. *Algorithm 1 は 1.5 近似アルゴリズムである．*

証明. Algorithm 1 により得られた配置の高さを H，最適値を H^* とおく．$S \subseteq R$ に対して $h(S) = \sum_{i \in S} h_i$ を表すものとする．

ステップ 2 において R_{wide} の長方形を順番に配置する際に，m の上辺に長方形を配置するか否かの 2 つのケースがある (図 2)．

(ケース 1) m の上辺に長方形を配置しない場合．R_{wide} の長方形は h_m とは別の列に直列に配置される．したがって

$$
\begin{aligned}
H &\leq \frac{h(R_{\mathrm{narrow}})}{2} + h(R_{\mathrm{wide}}) \\
&= \frac{h(R_{\mathrm{narrow}}) + h(R_{\mathrm{wide}})}{2} + \frac{1}{2} h(R_{\mathrm{wide}}) \\
&\leq H^* + \frac{1}{2} H^*
\end{aligned}
$$

となる．

(ケース 2) m の上辺に長方形を配置する場合．m の上辺から上に積み上げられる長方形の集合を $X \subseteq R_{\mathrm{wide}}$ とおく．各長方形 $i \in X$ に対して，m の上辺に積み上げられていることから $w_i > W - h_m$ であることに注意する．

$$
\begin{aligned}
H &\leq \frac{h(R_{\mathrm{narrow}}) - h_m}{2} + h_m + h(X) \\
&= \frac{h(R_{\mathrm{narrow}}) + h(X)}{2} + \frac{h_m + h(X)}{2} \\
&\leq H^* + \frac{1}{2} H^*
\end{aligned}
$$

以上より，どちらのケースにおいても $H \leq 1.5H^*$ が成り立つ． □

以下の問題例を考える．4 個の長方形と幅 $W = 2$ の容器が与えられ，各長方形の高さは 1 とし，幅は $w_1 = 1 - \epsilon, w_2 = 1 - \epsilon, w_3 = 1 + \epsilon, w_4 = 1 + \epsilon$ とする．このとき，最適値 H^* は 2 であり，提案手法により得られた容器の高さ H は 3 となる．よって，近似度が 1.5 となる例が存在する．

参考文献

[1] G. Wäscher, H. Haußner, and H. Schumann, “An improved typology of cutting and packing problems,” *European Journal of Operational Research*, vol. 183, no. 3, pp. 1109–1130 (2007).

[2] 橋本英樹, 胡艶楠, “配置が 2 列になる長方形ストリップパッキング問題,” スケジューリング学会シンポジウム, 2022 年 9 月, pp.48-53.