

対称錐上の共正值錐に対する近似階層とその比較

05001216 東京工業大学 *西島光洋 NISHIJIMA Mitsuhiro
01405430 東京工業大学 中田和秀 NAKATA Kazuhide

1. はじめに

共正值 (COP) 錐を制約に持つ錐線型計画—共正值計画 (COPP) と呼ばれる—は、様々な NP 困難な問題を統一的に表現できる問題クラスとして、近年注目を集めている。しかしそれゆえ、COPP を解くことも同様に困難である。

COPP を近似的に解く手法の 1 つとして、COP 錐に内側ないし外側から単調に収束し、かつ最適化が容易に行えるような凸錐の無限列 (近似階層) で COP 錐を置き換える方法がある。非負象限上の COP 錐に対する近似階層は数多く提案されているが (例えば [1, 5])、非負象限錐以外の閉錐上の COP 錐に対する近似階層は精力的に開発されていない。

そこで本研究では、対称錐上の COP 錐に対する近似階層を与える。また、提案した近似階層と数少ない既存の近似階層 [2, 6] 同士の比較も行う。

2. 準備

2.1. 共正值錐

閉錐 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して、 \mathbb{K} 上の COP 錐を、

$$COP(\mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{S}^n \mid x^\top A x \geq 0 \forall x \in \mathbb{K}\} \quad (1)$$

と定義する。ただし、 \mathbb{S}^n は n 次対称行列空間である。特に、 \mathbb{K} が非負象限錐 $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ のとき、 $COP(\mathbb{R}_+^n)$ を COP^n と書く。

2.2. 対称錐と Euclid 的 Jordan 代数

本研究では、式 (1) における \mathbb{K} が対称錐の場合に焦点を当てる。対称錐は Euclid 的 Jordan 代数 (EJA) と深い関係がある。有限次元実線型空間 \mathbb{E} における対称錐 \mathbb{K} が与えられたとき、ある EJA $(\mathbb{E}, \circ, \bullet)$ (\mathbb{K} に関連する EJA) が存在して、 \mathbb{K} は積 \circ に関する \mathbb{E} の 2 乗元全体 $\{x \circ x \mid x \in \mathbb{E}\}$ と書ける。本稿では、 \mathbb{R}^n に含まれる対称錐 \mathbb{K} のみを考えるため、線型空間 \mathbb{E} は常に数空間 \mathbb{R}^n である。ただし、 \mathbb{R}^n が EJA の構造を持つことを強調する際には、 \mathbb{R}^n を依然として \mathbb{E} で表す。階数 rk の EJA $(\mathbb{E}, \circ, \bullet)$ に対して、その順序付き Jordan フレーム全体からなる \mathbb{E}^{rk} の部分集合を $\mathfrak{F}(\mathbb{E})$ と書く。

3. 2 乗和内側近似階層

本節では、一般の対称錐 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ 上の COP 錐に対して、2 乗和 (SOS) 制約で記述される内側近似階層を与える。対称錐 \mathbb{K} に関連する EJA の 1 つを $(\mathbb{E}, \circ, \bullet)$ とする。

命題 1 ([3, 定理 3.3]). 各非負整数 $r \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\mathcal{K}_r(\mathbb{K}) := \left\{ A \in \mathbb{S}^n \mid \begin{array}{l} (x^\top x)^r (x \circ x)^\top A (x \circ x) \\ \text{が SOS 多項式} \end{array} \right\}$$

と定めると、各 $\mathcal{K}_r(\mathbb{K})$ は閉凸錐であり、次の 2 つが成り立つ：

(i) 任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して、 $\mathcal{K}_r(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{K}_{r+1}(\mathbb{K}) \subseteq COP(\mathbb{K})$ (単調非減少性)

(ii) $\text{int } COP(\mathbb{K}) \subseteq \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathcal{K}_r(\mathbb{K})$ (収束性) \square

集合 $\mathcal{K}_r(\mathbb{K})$ は、大きさが $\binom{n+r+1}{n-1}$ (これは r を固定すると n に関する多項式) の半正定値制約で記述できる。便宜上、集合列 $\{\mathcal{K}_r(\mathbb{K})\}_r$ を NN 型近似階層と呼ぶ。

4. 非 2 乗和近似階層

まず、 \mathbb{K} が一般の対称錐の場合を考える。対称錐 \mathbb{K} に関連する EJA の 1 つを $(\mathbb{E}, \circ, \bullet)$ とし、 rk をその階数とする。このとき、 $COP(\mathbb{K})$ が次の集合

$$\bigcap_{(c_1, \dots, c_{\text{rk}}) \in \mathfrak{F}(\mathbb{E})} \{A \in \mathbb{S}^n \mid [c_i^\top A c_j]_{i,j=1}^{\text{rk}} \in COP^{\text{rk}}\} \quad (2)$$

と一致することを証明できる [3, 補題 4.1].

対称錐上の COP 錐に対する近似階層を得るためのアイデアは、式 (2) に現れる COP^{rk} を、 COP^{rk} に対する近似階層で置き換えることである。この方法の問題点は、集合 $\mathfrak{F}(\mathbb{E})$ が一般に無限集合なので、近似階層で置き換えて得られる集合列を構成する各集合も一般に無限個の制約で記述されるということである。しかし、 \mathbb{K} が非負象限錐 \mathbb{R}_+^n と 1 つの 2 次錐 \mathbb{L}^{n_2} の直積集合のとき、[1, 5] でそれぞれ与えられている多面錐近似階層で COP^{rk} を置き換えると、以下で述べるように、非 SOS な半正定値制約で記述される近似階層を得ることができる。

4.1. 内側近似階層

式 (2) に現れる $\mathcal{COP}^{\text{rk}}$ を de Klerk と Pasechnik [1] によって与えられた内側多面錐近似階層で置き換えて得られる集合列 $\{\mathcal{I}_r(\mathbb{K})\}_r$ は, その第 r 番目の集合が

$$\bigcap_{\substack{(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{\text{rk}}) \\ \in \mathfrak{F}(\mathbb{E})}} \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{S}^n \mid \begin{array}{l} (\mathbf{x}^\top \mathbf{1})^r \mathbf{x}^\top [\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{c}_j]_{i,j=1}^{\text{rk}} \mathbf{x} \\ \text{が非負係数のみを持つ} \end{array} \right\}$$

となる.

命題 2 ([3, 命題 4.7]). 各 $\mathcal{I}_r(\mathbb{K})$ は閉凸錐であり, 集合列 $\{\mathcal{I}_r(\mathbb{K})\}_r$ は命題 1 と同様の単調非減少性および収束性を満たす. \square

ここで, 対称錐 $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{L}^{n_2}$ に関連する EJA $(\mathbb{E}, \circ, \bullet)$ を取ると, その階数 rk は $n_1 + 2$ であり, 集合 $\mathfrak{F}(\mathbb{E})$ は \mathbb{R}^{n_2-1} における単位球面を用いて記述される. そのため, rk 変数 $(r+2)$ 次の斉次多項式 $(\mathbf{x}^\top \mathbf{1})^r \mathbf{x}^\top [\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{c}_j]_{i,j=1}^{\text{rk}} \mathbf{x}$ の各係数が任意の $(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{\text{rk}}) \in \mathfrak{F}(\mathbb{E})$ に対して非負となる条件は, n_2 変数のある 2 次関数が球面上で非負となる条件として書けるが, それは大きさが n_2 の半正定値制約を用いて記述できる [4].

以上をまとめると, 集合 $\mathcal{I}_r(\mathbb{K})$ は, 大きさが n_2 で本数が $\binom{\text{rk}+r+1}{\text{rk}-1}$ (これは r を固定すると n_1 に関する多項式) の半正定値制約で記述できる. 便宜上, 集合列 $\{\mathcal{I}_r(\mathbb{K})\}_r$ を dP 型近似階層と呼ぶ.

4.2. 外側近似階層

式 (2) に現れる $\mathcal{COP}^{\text{rk}}$ を Yildirim [5] によって与えられた外側多面錐近似階層で置き換えて得られる集合列 $\{\mathcal{O}_r(\mathbb{K})\}_r$ は, その第 r 番目の集合が

$$\bigcap_{(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{\text{rk}}) \in \mathfrak{F}(\mathbb{E})} \left\{ \mathbf{A} \in \mathbb{S}^n \mid \begin{array}{l} \mathbf{x}^\top [\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{c}_j]_{i,j=1}^{\text{rk}} \mathbf{x} \geq 0 \\ \forall \mathbf{x} \in \delta_r^{\text{rk}-1} \end{array} \right\}$$

となる. ただし, $\delta_r^{\text{rk}-1}$ は $(\text{rk}-1)$ 次標準単体 $\Delta^{\text{rk}-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{\text{rk}} \mid \mathbf{x}^\top \mathbf{1} = 1\}$ の有限部分集合であり, $\delta_r^{\text{rk}-1} := \bigcup_{k=0}^r \frac{1}{k+2} \{\mathbf{x} \in \Delta^{\text{rk}-1} \mid (k+2)\mathbf{x} \in \mathbb{N}^{\text{rk}}\}$ と定義される.

命題 3 ([3, 命題 4.10]). 各 $\mathcal{O}_r(\mathbb{K})$ は閉凸錐であり, 次の 2 つが成り立つ:

- (i) 任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathcal{O}_{r+1}(\mathbb{K}) \subseteq \mathcal{O}_r(\mathbb{K})$
- (ii) $\mathcal{COP}(\mathbb{K}) = \bigcap_{r=0}^{\infty} \mathcal{O}_r(\mathbb{K})$ \square

4.1 項と同様の議論を行うと, 集合 $\mathcal{O}_r(\mathbb{K})$ は, 大きさが n_2 で本数が $|\delta_r^{\text{rk}-1}|$ (これは $\text{rk}^2 \binom{\text{rk}+1}{\text{rk}-1}$ 以下) の半正定値制約で記述できる. 便宜上, 集合列 $\{\mathcal{O}_r(\mathbb{K})\}_r$ を Yildirim 型近似階層と呼ぶ.

5. 他の近似階層との比較

本研究では, これまでに与えた 3 種類 (NN 型・dP 型・Yildirim 型) の近似階層と, $\mathbb{K} = \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{L}^{n_2}$ のときに適用可能な, $\mathcal{COP}(\mathbb{K})$ に対する 2 種類の既存の近似階層 [2, 6] 同士の比較も行った. その結果, dP 型および Yildirim 型近似階層は, 2 次錐のサイズ n_2 が大きくても, 階層の深さを定めるパラメータ r を数値計算上大きくできるが, その他 3 種類の近似階層は n_2 が大きいと, r を数値計算上大きくできないことが理論的考察および数値実験で示された. また, 今回提案した近似階層と既存の近似階層を併用することで, COPP 問題の近似最適値をより正確かつ効率的に求められた.

謝辞 本研究は, 日本学術振興会科学研究費助成事業 (JP20H02385・JP22J20008) の助成を受けた.

参考文献

- [1] de Klerk, E., Pasechnik, D.V.: Approximation of the stability number of a graph via copositive programming. *SIAM J. Optim.* **12**(4), 875–892 (2002)
- [2] Lasserre, J.B.: New approximations for the cone of copositive matrices and its dual. *Math. Program.* **144**, 265–276 (2014)
- [3] Nishijima, M., Nakata, K.: Approximation hierarchies for copositive cone over symmetric cone and their comparison. arXiv e-prints arXiv:2211.12753 (2022)
- [4] Sturm, J.F., Zhang, S.: On cones of nonnegative quadratic functions. *Math. Oper. Res.* **28**(2), 246–267 (2003)
- [5] Yildirim, E.A.: On the accuracy of uniform polyhedral approximations of the copositive cone. *Optim. Methods Softw.* **27**(1), 155–173 (2012)
- [6] Zuluaga, L.F., Vera, J., Peña, J.: LMI approximations for cones of positive semidefinite forms. *SIAM J. Optim.* **16**(4), 1076–1091 (2006)