多目的最適化問題に対する加速付き近接勾配法の改良

05001648　京都大学　*西村結希　NISHIMURA Yuki
05000235　京都大学　福田エレン秀美　FUKUDA Ellen Hidemi
01704632　京都大学　山下 信雄　YAMASHITA Nobuo

1. はじめに

本発表で扱う多目的最適化問題は以下のような無制約最適化問題である．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & F(x) \\ \text{subject to} & x \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{1}$$

関数 F は $F := (F_1, \ldots, F_m)^\top$ と表せるようなベクトル値関数で, 関数 $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と $g_i : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ を使って

$$F_i(x) := f_i(x) + g_i(x), \quad i = 1, \ldots, m$$

のように表せる．関数 $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は連続的微分可能で凸である．関数 $g_i : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ は閉真凸関数とする．$\nabla f_i(x)$ は定数 $L_i > 0$ に対してリプシッツ連続と仮定する．定数 L を

$$L := \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} L_i$$

として定義する．この問題において $m = 1$ とすると問題 (1) は単一目的最適化問題となる．この問題を解く様々な手法の中で近接勾配法とその加速的手法である加速付き近接勾配法 (FISTA) はよく使われている．これら二つの手法は文献 [4, 5] のように多目的最適化問題に拡張したアルゴリズムが提案されている．本発表では FISTA に対するいくつか改良手法である単調加速付き近接勾配法 (MFISTA) [1] とリスタート付き加速付き近接勾配法 (Restart FISTA) [2] に着目する．目的関数値が各反復ごとに単調減少するとは限らない FISTA に対して MFISTA は各反復で単調性を保証する．文献 [1] では FISTA では部分問題が正確に解けないものでは極端に非単調な点を生成してしまい, 発散してしまうような場合がある反面, 単調性が保証されている MFISTA ではこれを防ぐことができるため MFISTA は FISTA より安定しているアルゴリズムだと主張されている．FISTA は FISTA と同様に反復点を更新する中である条件を満たすときにリスタートさせる手法である．これは単一目的最適化問題において収束率が FISTA より改善されることが示されている．本発表では単一目的最適化問題における MFISTA をもとに多目的最適化問題に対するアルゴリズムを提案し, 収束定理を示す．また, MFISTA, Restart FISTA に対して数値実験を行なって既存手法の FISTA と比較を行う．

2. 準備

本節では記号や関数の導入を行う．ユークリッドノルムを $\|\cdot\|$ とし, 行列 A の転置を $A^\top$ と表記する．関数 F の有効領域を $\mathrm{dom} F := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) < \infty\}$ と定義する．一般的に多目的最適化問題ではそれぞれの目的関数が互いにトレードオフの関係にあるため, 全ての目的関数を最適化するような解が存在するとは限らない．本発表では弱パレート性の概念を導入し, 弱パレート最適解を求めることを目的とする．

定義 2.1. $F(x) < F(x^*)$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在しないような $x^* \in \mathbb{R}^n$ を弱パレート最適解という．

弱パレート最適解の集合 X^* は空集合でないと仮定する．関数 F の a に対するレベル集合 $\Omega_F(a)$, メリット関数 $u_0(x)$ を定義する．

$$\Omega_F(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \le a\} \tag{2}$$

$$u_0(x) := \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \min_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{F_i(x) - F_i(z)\} \tag{3}$$

補題 2.1. メリット関数 u_0 は x が弱パレート最適解のとき 0, そうでないときは正の値を取る．

3. 多目的最適化問題に対する MFISTA

はじめに, 多目的最適化問題における目的関数の単調性について定義する．

定義 3.1. 下の不等式が成り立つとき, 目的関数は単調減少するという．

$$\min_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{F_i(x^{k-1}) - F_i(x^k)\} \ge 0$$

定義 3.2. 下の不等式が成り立つとき, 目的関数は弱単調減少するという．

$$\max_{i \in \{1,\ldots,m\}} \{F_i(x^{k-1}) - F_i(x^k)\} \ge 0$$

弱単調減少の定義を用いた MFISTA のアルゴリズムは以下のように表される．

アルゴリズム 3.1. *1.* $k = 1$ として $y^1 = x^0 \in \mathrm{dom}\, F,\ t_1 = 1,\ \ell \ge L,\ \varepsilon > 0$ とする．

2. $k \geq 2$ に対して以下の更新を繰り返す．

$$\begin{aligned} z^k = \min_{z \in \mathbb{R}^n} \max_{i \in \{1,\ldots,m\}} & \Big\{ \Big\langle \nabla f_i(y), z - y^k \Big\rangle \\ & + g_i(z) + f_i(y^k) - F_i(x^{k-1}) \Big\} \\ & + \frac{\ell}{2} \Big\| z - y^k \Big\|^2 \end{aligned} \tag{4}$$

とする．$F_i(z^k)$ が $F_i(x^{k-1})$ に対して弱単調減少している場合, $x^k = z^k$ に更新する．そうでないとき $x^k = x^{k-1}$ として一つ前の反復点のままにする．また, t_k, y^k を更新する．

$$\begin{cases} t_{k+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2} \\ y^{k+1} = x^k + \left(\dfrac{t_k}{t_{k+1}} \right) (z^k - x^k) \\ \qquad + \left(\dfrac{t_k - 1}{t_{k+1}} \right) (x^k - x^{k-1}) \end{cases}$$

$m = 1$ のとき, これは単一最適化問題に対する MFISTA と一致する．提案した MFISTA のアルゴリズムが FISTA と等しく $O(1/k^2)$ で収束することが示せた．

定理 3.1. 全ての $x \in \Omega_F(F(x^0))$ について

$$R \coloneqq \sup_{F^* \in F(X^* \cap \Omega_F(F(x^0)))} \min_{x \in F^{-1}(\{F^*\})} \left\| x - x^0 \right\|^2$$

とする．$R < \infty$ が成り立ち, $F(x^*) \leq F(x)$ を満たすような $x^* \in X^*$ が存在するとする．このとき, *MFISTA* のアルゴリズムによって生成される点列 $\{x^k\}$ は全ての $k \geq 0$ に対して以下が成り立つ．

$$u_0(x^k) \leq \frac{2\ell R}{(k+1)^2}$$

4. 多目的最適化問題に対する Restart FISTA

多目的最適化問題に対する Restart FISTA は以下のように表せ, restart 条件は文献 [2] と同じものを使う．

アルゴリズム 4.1. *1.* $k = 1$ として *MFISTA* と同様の初期設定をする．

2. $k \geq 2$ に対して *MFISTA* と同じ部分問題をとき, 最適解を x^k とする．t_k と y^{k+1} を *MFISTA* と同様の式で更新する．

3. *restart* 条件を満たすとき, $y^{k+1} = x^k$ に設定しなおし, 部分問題を解き直す．その最適解を x^k とする．

Table 1: 弱パレート最適解を得るまでの反復回数と実行時間

	FISTA	MFISTA(弱)	RFISTA
反復回数	218.38	215.17	51.36
実行時間 (s)	67.03	62.19	17.51

5. 数値実験

本節では, $m = 3, n = 10$ の最適化問題を例として FISTA, MFISTA, Restart FISTA を用いて 100 回試行し, 結果を比較する．表 1 から FISTA と MFISTA は反復回数と実行時間共に同程度で, Restart FISTA が二手法と比べて効率よく解を求められていることが分かる．

6. まとめ

本発表では, 多目的最適化問題における MFISTA のアルゴリズムを提案し, 目的関数に対する仮定のもとでその収束率が FISTA のものと同じであることを示した．また, 数値実験によってパレートフロンティアが得られ, 反復回数が FISTA の反復回数と同程度で近接勾配法を改善していることを確かめた．

参考文献

[1] A. Beck and M. Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(11):2419–2434, 2009.

[2] P. Giselsson and S. Boyd. Monotonicity and restart in fast gradient methods. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5058–5063. IEEE, 2014.

[3] Y. Nishimura, E. H. Fukuda, and N. Yamashita. Monotonicity for multiobjective accelerated proximal gradient methods. *arXiv preprint arXiv:2206.04412*, 2022.

[4] H. Tanabe, E. H. Fukuda, and N. Yamashita. Proximal gradient methods for multiobjective optimization and their applications. *Computational Optimization and Applications*, 72(2):339–361, 2019.

[5] H. Tanabe, E. H. Fukuda, and N. Yamashita. An accelerated proximal gradient method for multiobjective optimization. *arXiv preprint arXiv:2202.10994*, 2022.