日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

集合値およびファジィ集合値最短経路問題

01110072　弘前大学　*金正道　KON Masamichi

1.　はじめに

最短経路問題を考える。ここで、各辺の長さは集合またはファジィ集合であるとし、異なる 2 頂点間の経路の長さは経由する辺の長さの総和によって定義され、弱非劣経路を考える。集合またはファジィ集合は、実数のベクトル（多目的の場合）に不確実性を考慮したものと解釈される。

2.　集合の演算と順序

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ および $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ とする。また、$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ および $\mathbb{R}^n_- = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}\}$ とする。

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ を $\mathbb{R}^n_+$ の空でないコンパクト部分集合すべての集合とする。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ 上の加法を各 $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ に対して

$$A + B = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x} \in A, \boldsymbol{y} \in B\}$$

と定義する。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ 上の擬順序（反射的, 推移的）$\leq$ および狭義半順序（非反射的, 推移的）$<$ を各 $A, B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ に対して

$$A \leq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + \mathbb{R}^n_+, A \subset B + \mathbb{R}^n_-$$

$$A < B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset A + \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+), A \subset B + \mathrm{int}(\mathbb{R}^n_-)$$

と定義する。ここで、$\mathrm{int}(\mathbb{R}^n_+)$ および $\mathrm{int}(\mathbb{R}^n_-)$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n_+$ および $\mathbb{R}^n_-$ の内部を表す。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ 上の狭義半順序 $<$ の非反射性は [2, 定理 6.6] 参照。

3.　ファジィ集合の演算と順序

$\widetilde{a} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ を $\mathbb{R}^n$ 上の**ファジィ集合**という。$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合すべての集合とする。

$\widetilde{a} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。各 $\alpha \in\,]0,1]$ に対して

$$[\widetilde{a}]_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \widetilde{a}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$$

を $\widetilde{a}$ の **α-レベル集合**とよぶ。

$$\mathrm{supp}(\widetilde{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \widetilde{a}(\boldsymbol{x}) > 0\}$$

を $\widetilde{a}$ の**サポート**とよぶ。$\widetilde{a}$ が**正規**であるとは、$[\widetilde{a}]_1 \neq \emptyset$ であるときをいう。

$\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ をサポートが $\mathbb{R}^n_+$ に含まれ、正規かつ任意の $\alpha \in\,]0,1]$ 対して α-レベル集合がコンパクトである $\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合すべての集合とする。$\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ 上の加法を各 $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ に対して

$$(\widetilde{a} + \widetilde{b})(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}} \min\{\widetilde{a}(\boldsymbol{y}), \widetilde{b}(\boldsymbol{z})\}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

と定義する。$\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ 上の擬順序（反射的, 推移的）$\leq$ および狭義半順序（非反射的, 推移的）$<$ を各 $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ に対して

$$\widetilde{a} \leq \widetilde{b} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\widetilde{a}]_\alpha \leq [\widetilde{b}]_\alpha, \forall \alpha \in\,]0,1]$$

$$\widetilde{a} < \widetilde{b} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\widetilde{a}]_\alpha < [\widetilde{b}]_\alpha, \forall \alpha \in\,]0,1]$$

と定義する。$\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ 上の狭義半順序 $<$ の非反射性は [2, 定理 8.9] 参照。

任意の有限個の $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \cdots, \widetilde{c} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ および任意の $\alpha \in\,]0,1]$ に対して

$$[\widetilde{a} + \widetilde{b} + \cdots + \widetilde{c}]_\alpha = [\widetilde{a}]_\alpha + [\widetilde{b}]_\alpha + \cdots + [\widetilde{c}]_\alpha \tag{1}$$

となる [2, 定理 8.1]。

4.　最短経路問題

$G = (V, E)$ をグラフとする。ここで、V は頂点の集合であり、$E \subset (V \times V) \setminus \{(i,i) : i \in V\}$ は辺の集合である。各辺 $(i,j) \in E$ は長さ $A_{ij} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ をもつか、または各辺 $(i,j) \in E$ は長さ $\widetilde{a}_{ij} \in \mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ をもつとする。2 つ以上の頂点の列 $P = (s, i, j, \cdots, k, t)$ で $(s,i) \in E$, $(i,j) \in E$, $\cdots$, $(k,t) \in E$ をみたすものを s から t への**経路**といい、P が経由する辺の長さの総和を P の長さと定義する。

$s, t \in V, s \neq t$ とし、$\mathcal{P}_{st}$ を s から t へのすべての経路の集合とし、$P^* \in \mathcal{P}_{st}$ とする。また、各 $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して、$\ell(P)$ を P の長さとする。P^* が s から t への**最短経路**であるとは、任意の $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して $\ell(P^*) \leq \ell(P)$ となるときをいう。P^* が s から t への**弱非劣経路**であるとは、$\ell(P) < \ell(P^*)$ となる $P \in \mathcal{P}_{st}$ が存在しないときをいう。弱非劣経路は必ず存在する。

ある $s\in V$ から他の $t\in V$ への最短経路または弱非劣経路を求める問題を**最短経路問題**という。特に、辺の長さが $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ の要素で与えられている最短経路問題を**集合値最短経路問題**とよび、辺の長さが $\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ の要素で与えられている最短経路問題を**ファジィ集合値最短経路問題**とよぶことにする。本稿では、弱非劣経路を求めることを目標とする。

5. 最短経路問題のスカラー化

各 $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ および $\lambda\in[0,1]$ に対して、**スカラー化関数** $\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}:\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)\to\mathbb{R}_+$ を各 $A\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ に対して

$$\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(A)=\lambda\max_{\boldsymbol{x}\in A}\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle+(1-\lambda)\min_{\boldsymbol{x}\in A}\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle \tag{2}$$

と定義（提案）する。ここで、$\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の標準内積である。

$A,B\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ に対して

$$A<B\Rightarrow\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(A)<\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(B) \tag{3}$$

となる。

$\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ とし、$\lambda\in[0,1]$ とする。任意の有限個の A, B, $\cdots$, $C\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ に対して

$$\begin{aligned}\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(A)+\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(B)+\cdots+\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(C)\\=\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(A+B+\cdots+C)\end{aligned} \tag{4}$$

となる。また、(1) および (4) より、任意の $\alpha\in\,]0,1]$ および任意の有限個の $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\cdots$, $\widetilde{c}\in\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+)$ に対して

$$\begin{aligned}\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}([\widetilde{a}]_\alpha)+\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}([\widetilde{b}]_\alpha)+\cdots+\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}([\widetilde{c}]_\alpha)\\=\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}([\widetilde{a}+\widetilde{b}+\cdots+\widetilde{c}]_\alpha)\end{aligned} \tag{5}$$

となる。

集合値最短経路問題において、$\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ および $\lambda\in[0,1]$ に対して

$$A_{ij}\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+),\quad(i,j)\in E$$

を

$$\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}(A_{ij})\in\mathbb{R}_+,\quad(i,j)\in E$$

で置き替えた最短経路問題を $\boldsymbol{k}$ および λ に関する集合値最短経路問題の**スカラー化最短経路問題**とよぶことにする。

ファジィ集合値最短経路問題において、$\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, $\lambda\in[0,1]$ および $\alpha\in\,]0,1]$ に対して

$$\widetilde{a}_{ij}\in\mathcal{FC}(\mathbb{R}^n_+),\quad(i,j)\in E$$

を

$$\psi_{\boldsymbol{k},\lambda}([\widetilde{a}_{ij}]_\alpha)\in\mathbb{R}_+,\quad(i,j)\in E$$

で置き替えた最短経路問題を $\boldsymbol{k}$, λ および α に関するファジィ集合値最短経路問題の**スカラー化最短経路問題**とよぶことにする。

スカラー化最短経路問題はダイクストラ法 [1] を適用することによって解くことができる。

(3) および (4) より、次の定理が成り立つ。

定理１ 集合値最短経路問題において、$s,t\in V, s\neq t$ とする。P^* を $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ および $\lambda\in[0,1]$ に関する集合値最短経路問題のスカラー化最短経路問題における s から t への最短経路とする。このとき、P^* はもとの集合値最短経路問題における s から t への弱非劣経路になる。

(3) および (5) より、次の定理が成り立つ。

定理２ ファジィ集合値最短経路問題において、$s,t\in V, s\neq t$ とする。P^* を $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{\boldsymbol{0}\}$, $\lambda\in[0,1]$ および $\alpha\in\,]0,1]$ に関するファジィ集合値最短経路問題のスカラー化最短経路問題における s から t への最短経路とする。このとき、P^* はもとのファジィ集合値最短経路問題における s から t への弱非劣経路になる。

6. おわりに

本稿では、辺の長さが集合またはファジィ集合で与えられた最短経路問題を扱った。そして、スカラー化関数を用いてスカラー化最短経路問題を提案し、スカラー化最短経路問題を解いて得られた最短経路が、もとの最短経路問題における弱非劣経路であることを示した。

参考文献

[1] E. W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs, Numerische Mathematik, Vol.1, 1959, pp.269–271

[2] 金正道, ファジィ集合最適化, 弘前大学出版会, 2019