日本オペレーションズ・リサーチ学会
2023 年春季研究発表会

ロバスト多目的最適化問題におけるスカラー化手法について

05000720　秋田県立大学　*荒谷洋輔　ARAYA Yousuke

1.　はじめに

不確実性を考慮した多目的最適化問題に取り組むためには、最悪である場合の状況 (シナリオ) を考えることにより、ロバスト最適化アプローチが有効である。

本稿では、ロバスト多目的最適化問題におけるスカラー化手法について、最新の結果 [3] を紹介する。それは**「ロバスト化 (robustification)」と「スカラー化（scalarization）」の２つの操作に関して順序交換可能であるための十分条件についてである。**本稿では、上記の解説の他に、従来の集合のスカラー化手法との関連性について考察する。

2.　準備

本稿では、Y をノルム空間、$\mathbf{0}_Y$ を Y の原点とする。集合 $A \subset Y$ に対し、A の位相的内部/閉包をそれぞれ $\mathrm{int}A$、$\mathrm{cl}A$ と表す。また、本稿では、$C \subset Y$ は閉凸錐を表すものとする。錐 $C \subset Y$ が solid とは $\mathrm{int}C \neq \emptyset$ を満たすことであり、pointed であるとは $C \cap (-C) = \{\mathbf{0}_Y\}$ が成立する場合である。

凸錐 $C \subset Y$ によってベクトル順序 $\leq_C$ が導入され、$(Y, \leq_C)$ は順序ベクトル空間となる。

$$\forall y_1, y_2 \in Y, \qquad y_1 \leq_C y_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} y_2 - y_1 \in C$$

$\mathcal{V}$ を Y の空でない部分集合全体とする。$\alpha \in \mathbb{R}$、$V_1, V_2, V \in \mathcal{V}$ に対して、2 つの集合の和・スカラー積は以下のように定義される。

$$V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

$$\alpha V := \{\alpha v \mid v \in V\}$$

定義 2.1 (集合関係：黒岩-田中-Ha[8])**.** $A,\ B \in \mathcal{V}$ と solid な凸錐 $C \subset Y$ に対して、以下を定義する。

$$[\textbf{lower}] \quad A \leq_C^l B \quad \text{by} \quad B \subset A + C$$

$$[\textbf{upper}] \quad A \leq_C^u B \quad \text{by} \quad A \subset B - C$$

例 1. 集合の特別な場合として、「区間」を考える。

$$Y = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$$

$$A = [a_1, a_2], \quad B = [b_1, b_2] \quad (a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R})$$

このとき、$\leq_C^l$、$\leq_C^u$ について次が分かる。

$$A \leq_C^l B \iff a_1 \leq b_1, \quad A \leq_C^u B \iff a_2 \leq b_2$$

命題 2.2 ([1])**.** $A, B, D \in \mathcal{V}$、$\alpha \geq 0$ に対して、次が成り立つ。

(i) $A \leq_C^u B \quad \Longrightarrow \quad A + D \leq_C^u B + D$、
(ii) $A \leq_C^u B \quad \Longrightarrow \quad \alpha A \leq_C^u \alpha B$、
(iii) $\leq_C^u$ は、反射律と推移律が成り立つ。

定義 2.3 (C-proper)**.** $A \in \mathcal{V}$ が C-proper [$(-C)$-proper] であるとは、$A + C \neq Y [A - C \neq Y]$ が成り立つときである。

定義 2.4 (C-closed：Luc[9])**.** $A \in \mathcal{V}$ が C-closed [$(-C)$-closed] であるとは、$A + C$ [$A - C$] が閉集合であることと定義する。

また、$\mathrm{cl}(\mathcal{V}_C)$ を Y の C-proper かつ C-closed である空でない部分集合の族とする。

3.　本論

3.1.　ロバスト多目的最適化問題の定式化

定義 3.1 (ロバスト多目的最適化問題 [3, 4])**.** $\mathcal{X}$ を決定空間、$\mathcal{U}$ を状況集合（不確実集合とも呼ばれる）、$f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to Y$ をパラメータ付きベクトル値の目的関数とする。不確実性を考慮したロバスト多目的最適化を以下のように定式化する。

$$\mathrm{VP}(\mathcal{U}) \begin{cases} \text{minimize} \quad f(x, \xi) \\ \text{subject to} \quad x \in \mathcal{X}, \xi \in \mathcal{U} \end{cases}$$

次に、ロバスト多目的最適化問題における解の概念を考える。

定義 3.2 (ロバスト狭義有効解・有効解 [3, 4])**.** 要素 $x_0 \in \mathcal{X}$ がロバスト狭義有効解であるとは、次を満たす $x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ が存在しない時に言う。

$$\forall \xi \in \mathcal{U}, \exists \xi' \in \mathcal{U} : f(x, \xi) \leq_C f(x_0, \xi')$$

要素 $x_0 \in \mathcal{X}$ がロバスト有効解であるとは、次を満たす $x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ が存在しない時に言う。

$$\forall \xi \in \mathcal{U}, \exists \xi' \in \mathcal{U} : f(x, \xi) \leq_C f(x_0, \xi') \qquad \text{and}$$

$$\exists \bar{\xi} \in \mathcal{U} \text{ such that } f(x_0, \bar{\xi}) \not\leq_C f(x, \xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{U}$$

以下の集合値写像 $F:\mathcal{X}\to 2^Y$ を考える。

$$F(x):=\{f(x,\xi)\mid \xi\in\mathcal{U}\},\quad \forall x\in\mathcal{X}$$

すると、(a) ロバスト狭義有効解、(b) ロバスト有効解の定義は以下のように書くことが出来る。

$$\text{(a)}\quad \forall x\in\mathcal{X}\setminus\{x_0\},\quad F(x)\not\leq_C^u F(x_0)$$

$$\text{(b)}\ x\in\mathcal{X}, F(x)\leq_C^u F(x_0)\Longrightarrow F(x_0)\leq_C^u F(x)$$

3.2. スカラー化手法

まず、ベクトル値の目的関数をロバスト化した問題 (RC-VP) を考える。(RC-VP) は upper 型の集合最適化問題であることに注意する。

$$\text{(RC-VP)}\begin{cases} u\text{−minimize}\quad F(x)\\ \text{subject to}\quad x\in\mathcal{X}\end{cases}$$

$\Psi:2^Y\to[-\infty,\infty]$ をスカラー関数とする。次に、(RC-VP) をスカラー化した問題 (S_Ψ-RC-VP) を考える。

$$(S_\Psi\text{-RC-VP})\begin{cases} \text{minimize}\quad \Psi(F(x))\\ \text{subject to}\quad x\in\mathcal{X}\end{cases}$$

ここで、$A\subset Y$ を空でない集合、$\varphi:Y\to[-\infty,\infty]$ を Ψ とは別物のスカラー化関数とする。$\varphi_{A-K}:Y\to[-\infty,\infty]$ を以下で定義する。

$$\varphi_{A-K}(y):=\inf_{a\in A-K}\varphi(y-a),\quad \forall y\in Y$$

VP($\mathcal{U}$) をスカラー化した (S_φ-VP($\mathcal{U}$)) を考える。

$$(S_\varphi\text{-VP}(\mathcal{U}))\begin{cases} \text{minimize}\quad \varphi_{A-K}(f(x,\xi))\\ \text{subject to}\quad x\in\mathcal{X}\end{cases}$$

次に、[2] のロバストアプローチを利用して、(S_φ-VP($\mathcal{U}$)) をロバスト化した (RC-S_φ-VP) を考える。

$$\sup_{\xi\in\mathcal{U}}\varphi_{A-K}(f(x,\xi))=\sup_{y\in F(x)}\varphi_{A-K}(y)$$

$$(\text{RC-}S_\varphi\text{-VP})\quad\begin{cases} \text{minimize}\quad \sup_{y\in F(x)}\varphi_{A-K}(y)\\ \text{subject to}\quad x\in\mathcal{X}\end{cases}$$

本発表では、問題 (S_Ψ-RC-VP) と (RC-S_φ-VP) が等しくなる十分条件について紹介する。特別な場合として、Gerstewitz の非線形スカラー関数 [6] を適用した結果が以下である。

定理 3.3 ([3]). $f:\mathcal{X}\times\mathcal{U}\to Y$、$F:\mathcal{X}\to \mathrm{cl}(\mathcal{V}_C)$、$C\subset Y$ を *solid* な閉凸錐、$k^0\in\mathrm{int}C$ とする。

$$\phi_{k^0,a}(y)=\min\{t\in\mathbb{R}\,\big|\,y\in tk^0+a-C\}$$

$$G_{k^0,A}(B)=\inf\{t\in\mathbb{R}\,\big|\,B\subset tk^0+A-C\}$$

$A=F(x_0)$ とする。そのとき、次は同値である。

(1) x_0 はロバスト狭義有効解である。

(2) x_0 は *RC-*S_ϕ*-VP* の唯一解である。

(3) x_0 は S_G*-RC-VP* の唯一解である。

さらには、上記の結果と集合の非線形スカラー化手法 [1, 5, 7] との関係性にも言及する予定である。

参考文献

[1] Y. Araya, *Existence theorems of cone saddle-points in set optimization applying nonlinear scalarizations*, Linear Nonlinear Anal. 6 (2020) 13–33.

[2] A. Ben-Tal, A. Nemirovski, *Robust optimization—methodology and applications*, Math. Program. 92 (2002), no. 3, Ser. B, 453–480.

[3] E. Caprari, C. B. Lorenzo, E. Molho, *Scalarization and robustness in uncertain vector optimization problems: a non componentwise approach*, J. Global Optim. 84 (2022), no. 2, 295–320.

[4] M. Ehrgott, J. Ide, A. Schöbel, *Minmax robustness for multi-objective optimization problems*, European J. Oper. Res. 239 (2014), 17–31.

[5] P. G. Georgiev, T. Tanaka, *Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality*, J. Nonlinear Convex Anal. 1, (2000), 245–254.

[6] C. Gerth, P. Weidner, *Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization*, J. Optim. Theory Appl. 67, (1990), no.2, 297–320.

[7] A. Hamel, A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland's principle with set relations*, J. Nonlinear and Convex Anal. 7, (2006), no. 1, 19–37.

[8] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T.X.D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. 30 (1997) 1487–1496.

[9] D. T. Luc, *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).