

ゼッケンドルフの定理を参考にした一般化されたフィボナッチ数列の視覚化

01405264 大阪工業大学

*中西 真悟

NAKANISHI Shingo

1. はじめに

ゼッケンドルフの定理[1]を用いると、フィボナッチ数列を活用した自然数が視覚化できる。クヌースもまたアルゴリズムとして二進数表記の基数でゼッケンドルフの表現とフィボナッチ数列の関係を説明している[2]。本研究では、この考え方に規範として一般化されたフィボナッチ数列について視覚化を考察したい。

2. 本研究で扱う一般化されたフィボナッチ数列

一般化されたフィボナッチ数列の定義は複数存在するが、ここでは

$$F_{(a,b),0} = 0, F_{(a,b),1} = 1,$$

$$F_{(a,b),j} = a \cdot F_{(a,b),j-1} + b \cdot F_{(a,b),j-2} \quad (j \geq 2) \quad (1)$$

を取り扱う[3-7]。 $a = 1$ かつ $b = 1$ がオリジナルのフィボナッチ数列であり、基数 $d_{(a,b),n,j}$ を加えた

ゼッケンドルフの表現を参考にして自然数を

$$n = \sum_{0 \leq d_{(a,b),n,j} \leq \max(a,b-1)} d_{(a,b),n,j} \cdot F_{(a,b),j} \quad (2)$$

と表記する。ここで、 $n = F_{(1,1),n,j}$ が成立するとき、一つ小さな自然数は、連続するフィボナッチ数を選択しないため

$$\begin{aligned} n-1 &= \sum_{k=0 \text{ OR } 1}^{j-2} (1 \cdot F_{(1,1),n-1,2k+1} + 0 \cdot F_{(1,1),n-1,2k}) \end{aligned} \quad (3)$$

と二進数表記の基数で1と0を繰り返す $d_{(1,1),n-1,j}$ が成立する。また、フィボナッチ数列を活用したすべての自然数はオストロフスキーの記数法[7]が成立する。この考え方を一般化されたフィボナッチ数列を

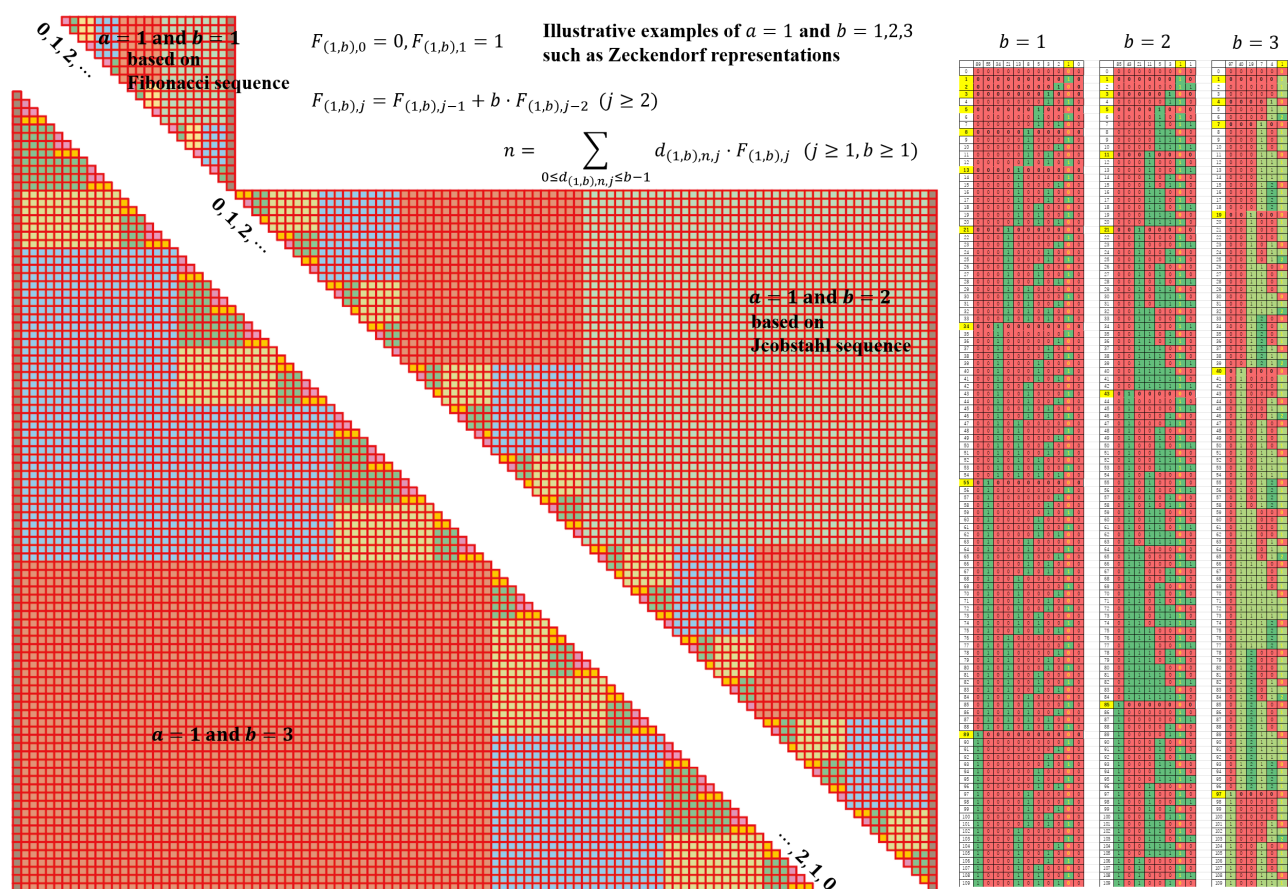


図1 $F_{(1,b),j} = F_{(1,b),j-1} + b \cdot F_{(1,b),j-2}$, ($a = 1$) を活用したゼッケンドルフ表現を参考にした可視化

用いたときに応用するためには、 $n = F_{(a,b),n,j}$ に関して $d_{(a,b),n-1,j}$ が、基数 a と $b-1$ を繰り返す組で構成された表現式

$$n-1 = \sum_{k=0 \text{ OR } 1}^{j-1} (a \cdot F_{(a,b),n-1,2k+1} + (b-1) \cdot F_{(a,b),n-1,2k}) \quad (4)$$

を想定すれば、隣り合う一般化されたフィボナッチ数を用いるため、ゼッケンドルフの表現ではなくなるが図1の右側の表の $b > 1$ のときのように見積ることができる。また、図1では、 $F_{(a,b),1} = 1$ と $F_{(a,b),2} = 1$ の係数だけ位取りを工夫して数え上げている。具体的には図1の右側の数値表を確認すれば見当が付く。

ところで、図2を確認すると、 $b = 1$ のため、式(4)から、 a と 0 を繰り返す組で成り立つことがわかるのだが、 $F_{(a,1),n-1,1}$ の基数だけ1小さい数値となる。 a と 0 で調子よく構成された組で一番小さな組の $b-1$ に 1 を加えると一期に桁が上がる変形基数 a and $b-1$ が出来上がったかと思えば、万葉集の短歌でもあまり出てこない字足らずのように、初項

$F_{(a,b),n,1}$ に対しては基数 $a-1$ の特徴が起こる。

このように、一般化されたフィボナッチ数列を活用した変形基数 a and $b-1$ の活用で、 $a, b (> a)$ ともに 1 でないときに応用するには、 a, b について a を基準とするか、 b を基準とするか注意しなければならない特徴がある。こちらは紙面の関係で表記できないので発表中に紹介したい。

参考文献

- [1]「ゼッケンドルフの定理」, Wikipedia, (2021-12-30 にアクセス).
- [2] D. E. Knuth, "Fibonacci Multiplication", Applied Mathematics Letters, Vol. 1. No.1. pp. 57-60, (1988).
- [3] 中西真悟, "一般化フィボナッチ数列と二項定理を用いた貴金属比の類似比の幾何学的考察 ガウス平面を応用した等角螺旋の等角写像デザイン", 2021 年 OR 学会秋季研究発表会予稿集, 1-D-2, (2021).
- [4] Shingo Nakanishi, "Visualizations of discrete equiangular spirals based on similar metallic ratios using Pythagorean theorem and weighted Fibonacci sequences", EURO2021, No.936, (2021)
- [5] 中西真悟, "貴金属比の類似比が奏でる数理情報デザイン 等角螺旋を目指したケプラー三角形とピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列の協奏", 大阪工業大学イノベーションデイズ2021, (2021).
- [6] 中西真悟, "一般化されたフィボナッチ数列とピタゴラスの定理と二項定理を用いた貴金属比の類似比に関する等角螺旋の可視化と幾何学的特性", 自主研究ノート, 大阪工業大学・著者ホームページ, pp.1-51, (2021).
- [7] "Ostrowski numeration", Wikipedia, (2021-12-30 にアクセス).

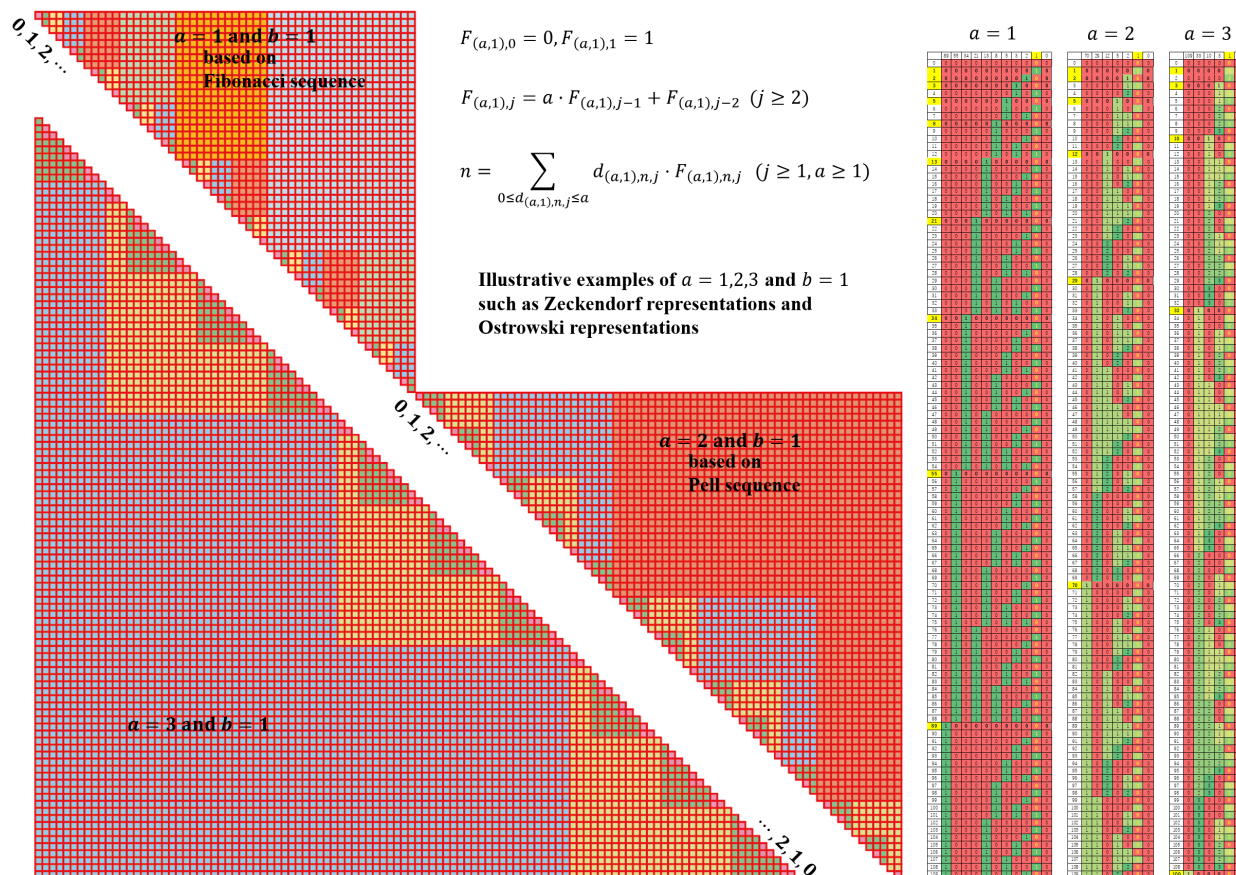


図2 $F_{(a,1),j} = a \cdot F_{(a,1),j-1} + F_{(a,1),j-2}$, ($b = 1$) を活用したゼッケンドルフ表現を参考にした可視化