日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

単位時間当りの期待費用を最小にする逐次点検時刻計算手法

02602443　愛知工業大学　*水谷聡志　MIZUTANI Satoshi
01400043　愛知工業大学　中川覃夫　NAKAGAWA Toshio

1.　はじめに

産業設備や通信機器などのシステムは時間の経過によって劣化するが，通常業務中に劣化の度合いや故障の発生を即座に把握することは難しい．よって，それらのシステムを経過時間と共に頻繁に点検する必要があるが，点検を数多く実施すると費用が多くかかる．このため，適切な時間間隔で点検を実施する必要がある．このような問題に対して，確率モデルを用いて最適な点検時刻を求める理論的な研究と計算手法の考案が行われてきた [1, 2, 3]．

本研究では，点検時間間隔が一定でない逐次点検方策に対し，単位時間当りの期待費用を最小にする最適な点検時刻を計算する反復法アルゴリズムを提案する．また，拡張モデルとして，点検回数が有限な数として与えられるモデルと有限な稼動期間を考慮したモデルも扱う．

2.　基本逐次点検方策

以下の仮定をする．

(i) ユニットの故障は有限な平均 $\mu \equiv \int_0^\infty \overline{F}(t)dt$ をもつ故障分布 $F(t)$ に従う．ここで，$\overline{F}(t) \equiv 1 - F(t)$ である．

(ii) ユニットは時刻 T_k $(k = 1, 2, \ldots)$ で点検され，$T_0 = 0$ であり，各点検の実施時間は無視できるとする．

(iii) ユニットに故障が発生したとき，その故障は次の点検により検出される．

(iv) c_1 を点検を 1 回実施するために要する費用，c_2 を故障の発生から検出されるまでの時間にかかる単位時間当りの損失費用とする．

故障を検出するまでの期待費用は [1, 3]

$$C(\boldsymbol{T}_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{T_k}^{T_{k+1}}[c_1(k+1)+c_2(T_{k+1}-t)]\mathrm{d}F(t) = \sum_{k=0}^{\infty}[c_1+c_2(T_{k+1}-T_k)]\overline{F}(T_k)-c_2\mu, \quad (1)$$

故障を検出するまでの期待時間は

$$M(\boldsymbol{T}_k) = \sum_{k=0}^{\infty}(T_{k+1}-T_k)\overline{F}(T_k). \quad (2)$$

これより，単位時間当りの期待費用は

$$R(\boldsymbol{T}_k) \equiv \frac{C(\boldsymbol{T}_k)}{M(\boldsymbol{T}_k)}. \quad (3)$$

ユニットが定期時刻 kT $(k = 1, 2, \ldots)$ に点検されるとき，(3) 式は

$$R(T) = \frac{c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \overline{F}(kT) - c_2\mu}{T\sum_{k=0}^{\infty} \overline{F}(kT)} + c_2. \quad (4)$$

以下のように $D(\boldsymbol{T}_k, \alpha)$ を定義する [1]:

$$D(\boldsymbol{T}_k, \alpha) \equiv C(\boldsymbol{T}_k) - \alpha M(\boldsymbol{T}_k) \quad (k = 1, 2, \ldots). \quad (5)$$

次に，$D(\boldsymbol{T}_k, \alpha) = 0$ となる $\alpha = \alpha^*$ を求める．いわば，

$$\alpha^* = R(\boldsymbol{T}_k). \quad (6)$$

単位時間当りの期待費用 $R(T)$ と $R(\boldsymbol{T}_k)$ を最小にする最適方策を求める．$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ のとき，(4) 式は

$$R(T) = \frac{c_1 - (c_2/\lambda)(1-\mathrm{e}^{-\lambda T})}{T} + c_2. \quad (7)$$

$R(T)$ を T で微分し 0 とおくと，次式を得る．

$$1 - (1+\lambda T)\mathrm{e}^{-\lambda T} = \frac{c_1}{c_2/\lambda}. \quad (8)$$

上式から，もし $c_2/\lambda > c_1$ ならば，有限で唯一の $R(T)$ を最小にする T^* $(0 < T^* < \infty)$ が存在し，また単位時間当りの期待費用は次式で与えられる．

$$R(T^*) = c_2(1 - \mathrm{e}^{-\lambda T^*}). \quad (9)$$

(3) 式における単位時間当りの期待費用 $R(\boldsymbol{T}_k)$ を最小にする最適な点検方策を得るためのアルゴリズムを以下のように提案する．ただし”:=”は代入演算子である．

1: 初期化：$T_0^{(0)} := 0$ また $\alpha^{(0)} := 0$ とし，T^* を計算する．また $T_k^{(0)} := kT^*$ $(k = 1, 2, \dots)$ とする．$\alpha^{(1)} := R(\boldsymbol{T}_k^{(0)})$, また $i := 1$.

2: $|\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)}|$ が十分小さくなるまで，以下の処理を繰り返す：$T_0^{(i)} := 0$, また

$$T_{k+1}^{(i)} - T_k^{(i)} = \frac{F(T_k^{(i)}) - F(T_{k-1}^{(i)})}{f(T_k^{(i)})} - \frac{c_1}{c_2 - \alpha^{(i)}} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

から $T_1^{(i)}, T_2^{(i)}, \dots$ を計算する．

$\alpha^{(i+1)} := R(\boldsymbol{T}_k^{(i)})$, また $i := i + 1$ とする．

3: $\boldsymbol{T}_k^* = \boldsymbol{T}_k^{(i-1)}$, また $\alpha^* := \alpha^{(i)}$.

3. 拡張点検方策

次の拡張モデルについて，単位時間当りの期待費用を最小にする点検時間を求める手法を提案する．

3.1. 有限点検回数モデル

ユニットは時刻 T_k $(k = 1, 2, \dots, N-1)$ に点検され，時刻 T_N $(N = 1, 2, \dots)$ に取替られる．いわば，故障の検出または時刻 T_N $(N = 1, 2, \dots)$ の先に起こった時刻にユニットの取替を実施する．c_3 を時刻 T_k または T_N における取替費用とする．

3.2. 有限稼動期間モデル

ユニットは有限期間 $[0, S]$ 稼動しなければならないとする．また，時刻 T_k $(k = 1, 2, \dots, N)$ で点検され，$T_N = S$ とする．このとき，単位時間当りの期待費用は

$$R_S(\boldsymbol{T}_k) = \frac{c_1 \sum_{k=0}^{N-1} \overline{F}(T_k) - c_2 \int_0^S \overline{F}(t) \mathrm{d}t + c_3}{\sum_{k=0}^{N-1} (T_{k+1} - T_k) \overline{F}(T_k)} + c_2. \tag{10}$$

(10) 式より，ユニットが時刻 kT で点検されるとき，

$$R_S(T) = \frac{c_1 \sum_{k=0}^{N-1} \overline{F}(kT) - c_2 \int_0^S \overline{F}(t) \mathrm{d}t + c_3}{T \sum_{k=0}^{N-1} \overline{F}(kT)} + c_2. \tag{11}$$

上式を最小にする最適な点検間隔を T^* とする．$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ とするとき，$R_S(T)$ を T で微分し 0 と等しいとおくと，次式を得る．

$$\left(\frac{c_2}{\lambda} - \frac{c_3}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda S}}\right) [1 - (1 + \lambda T) \mathrm{e}^{-\lambda T}] - \frac{c_3 \lambda S \mathrm{e}^{-\lambda S} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda T})}{(1 - \mathrm{e}^{-\lambda S})^2} = c_1. \tag{12}$$

また，(5) 式と同様にして

$$D_S(\boldsymbol{T}_k, \alpha) = \sum_{k=0}^{N-1} [c_1 + (c_2 - \alpha)(T_{k+1} - T_k)] \overline{F}(T_k) + c_3 - c_2 \int_0^S \overline{F}(t) \mathrm{d}t. \tag{13}$$

このとき，最適な点検方を得るアルゴリズムを以下のように提案する．

1: 初期化: $T_0^{(0)} := 0$ また $\alpha^{(0)} := 0$. $T^* = S/N$ を計算し，$T_k^{(0)} := kT^*$ $(k = 1, 2, \dots, N)$, $\alpha^{(1)} := R_S(\boldsymbol{T}_S^{(0)})$, $i := 1$ とする．

2: $|\alpha^{(i)} - \alpha^{(i-1)}|$ が十分小さくなるまで，以下の処理を繰り返す：$T_0^{(i)} := 0$, $T_N^{(i)} := S$ とし，

$$T_{k+1}^{(i)} - T_k^{(i)} = \frac{F(T_k^{(i)}) - F(T_{k-1}^{(i)})}{f(T_k^{(i)})} - \frac{c_1}{c_2 - \alpha^{(i)}},$$

$$S^{(i)} - T_{N-1}^{(i)} = \frac{F(T_{N-1}^{(i)}) - F(T_{N-2}^{(i)})}{f(T_{N-1}^{(i)})} - \frac{c_1}{c_2 - \alpha^{(i)}},$$

から $T_1^{(i)}, T_2^{(i)}, \dots, T_{N-1}^{(i)}$ を計算する．

$\alpha^{(i+1)} := R_S(\boldsymbol{T}_S^{(i)})$, $i := i + 1$ とする．

3: $T_k^* = T_k^{(i)}$ $(k = 0, 1, \dots, N)$, また $\alpha^* := \alpha^{(i)}$.

これらのアルゴリズムを用いて計算した数値例を発表当日に示す．

謝辞

本研究の一部は，文部科学省科学研究費基金 (基盤研究 (C)) 課題番号 (18K01713)(2018-2021), (20K04992)(2020-2022) による補助を受けている．

参考文献

[1] R. E. Barlow and F. Proschan, Mathematical Theory of Reliability. John Wiley & Sons, New York, 1965.

[2] D. M. Brender, A surveillance model for recurrent events, IBM Watson Research Center Report, 1963.

[3] T. Nakagawa, Maintenance Theory of Reliability, Springer, 2005.